UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

Dejan Ilić
Vladimir Rakočević

KONTRAKTIVNA PRESLIKAVANJA NA METRIČKIM PROSTORIMA I UOPŠTENJA

Niš, 2014.

Dejan Ilić
Vladimir Rakočević

KONTRAKTIVNA PRESLIKAVANJA NA METRIČKIM PROSTORIMA I UOPŠTENJA

Prvo izdanje

Serija:
udžbenici

Izdavač:
Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Niš, 2014.

Izdavač:
Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Recenzenti:
Dr Ljiljana Gajić, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu
Dr Dragan Đorđević, redovni profesor PMF-a u Nišu

Serija: udžbenici

Obrada računarom i dizajn: Autori

Štampa: SVEN, Niš

Tiraž: 300

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu broj 974/2-01 od 23.11.2011. godine, rukopis je odobren za štampu kao univerzitetski udžbenik.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

515.126.4(075.8)

ИЛИЋ, Дејан, 1973-
Kontraktivna preslikavanja na metričkim prostorima i uopštenja / Dejan Ilić, Vladimir Rakočević. - 1. izd. - Niš : Prirodno-matematički fakultet, 2014 (Niš : Sven). - 230 str. : graf. prikazi ; 25 cm. - (Serija Udžbenici)

Na nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž 300. - Napomene uz tekst. - Bibliografija: str. 217-228. - Registar.

ISBN 978-86-6275-022-8

1. Ракочевић, Владимир, 1953- [аутор]
а) Метрички простори b) Теорија непокретне тачке
COBISS.SR-ID 205062412

Ova knjiga je posvećena profesoru i prijatelju

Ljubomiru B. Ćiriću

Sadržaj

Predgovor

Teorija fiksne tačke je povezana sa mnogim oblastima matematike, kao što su: klasična analiza, funkcionalna analiza, numerička analiza, topologija, teorija operatora i algebarska topologija. Najveći broj teorema koje dokazuju egzistenciju rešenja određene diferencijalne, integralne, operatorske ili neke druge jednačine zapravo predstavljaju određene teoreme o fiksnoj tački. Teorija fiksnih tačaka je jedna od glavnih grana nelinearne analize. Brojna pitanja fizike, hemije, biologije, ekonomije i drugih nauka vode do različitih diferencijalnih i integralnih jednačina.

Ova knjiga se uglavnom sastoji od predavanja koja su autori držali na Prirodno matematičkom fakultetu, Univeziteta u Nišu. Prvenstveno je namenjena studentima kao osnovni udžbenik iz predmeta *Teorija fiksne tačke i primene*, koji se predaje studentima matematike na master studijama. Smatramo da knjiga može uspešno da koristi studentima doktorskih studija, ali i kao literatura za naučno-istraživački rad.

Knjiga je podeljena na četiri glave i sadrži deo Dodatak(u ovom delu izlažemo(podsećamo) na neke pojmove i stavove koji se koriste u knjizi). Svaka glava se sastoji iz više poglavlja.

U prvoj glavi uvodimo oznake, osnovne pojmove i rezultate koji se kasnije koriste. U ovoj glavi izučavamo čuvenu Banachovu teoremu o fiksnoj (nepokretnoj) tački [12]; ona se često naziva i *Banachov princip kontrakcije. Za ovaj princip iz 1922. godine vezuje se početak izučavanja teorije fiksne tačke u metričkim prostorima.* Pored klasičnog Banachovog dokaza iz rada [12], izloženi su i drugi dokazi pomenute teoreme iz sledećih radova: Joseph i Kwack [80], Palais [108], Boyd i Wong [21]. Date su primene pomenute teoreme kod izučavanja perturbacije invertibilnog ograničenog linearnog operatora na Banachovom prostoru, kod izučavanja egzistencije rešenja jednačina.

Razmatraju se obične jednačine, sistem od $n-$linearnih algebarskih jednačina, diferencijalne jednačine i integralne jednačine.

Mnogi autori su definisali preslikavanja kontraktivnog tipa na kompletnom metričkom prostoru X koja su uopštenja dobro poznate Banachove kontrakcije. U mnogim slučajevima takva preslikavanja imaju jedinstvenu fiksnu tačku, i ona se može dobiti koristeći Picardovu iteraciju, počevši od neke početne tačke $x_0 \in X$.

U drugoj glavi iznosimo pojedine rezultate u vezi pomenute problematike. Napomenimo da su, između ostalog, izloženi rezultati is radova : Edelstein [49, 48], Rakotch [111], Boyd i Wong [22], Meir i Keeler [103], Kannan [89], Chatterjea [28], Zamfirescu [150], Ćirić [35, 37], Reich [117], Hardy i Rogers [67], Jungck [81], Das i Naik [46], Sessa [133], Rakočević, [41], Fisher [54], Caristi [27], Bollenbacher i Hicks [20], Rhoades [123] i Berinde [15]. Navedeni radovi obuhvataju vremenski period od 1961. godine do 2004. godine, i predstavljaju pregled rezultata iz navedenog vremenskog perioda. Smatramo da bi ovakvo prezentiranje materjala trebalo da omogući mladom čitaocu detaljno upoznavanje sa pomenutom problematikom, i otvori mogućnost za savremena samostalna istraživanja. Napomenimo da je Rhoades [122] 1977. godine objavio veoma značajan rad u kome je izložio pregled i poređenje 250 različitih definicija preslikavanja kontraktivnog tipa.

U trećoj glavi izlažemo rezultate iz radova Sehgal [134], Guseman [59], kao i uopštenja njihovih rezultata koje je dao Ćirić [37, 38], a koji se odnose na kontraktivna preslikavanja lokalnog tipa u tački. Pored toga, u vezi sa prethodnim, izloženi su pojedini rezultati Ray i Rhoadesa [116] i Matkowskia [100].

U četvrtoj glavi izloženi su i originalni rezultati autora. U njima se izučavaju fiksne tačke preslikavanja na prostorima koji uopštavaju metričke prostore, tj., na konusnim metričkim prostorima, prostorima sa $w-$rastojanjem i parcijalnim metričkim prostorima.

Zahvaljujemo se recenzentima, Prof. dr Ljiljani Gajić i Prof. dr Draganu Đorđeviću, koji su svojim sugestijama i primedbama doprineli poboljšanju ovog rukopisa.

U Nišu, novembra 2011. godine Autori

Glava 1

Banachov princip kontrakcije

U ovoj glavi izučavamo čuvenu Banachovu teoremu o fiksnoj (nepokretnoj) tački [12]; ona se često naziva i *Banachov princip kontrakcije. Za ovaj princip iz 1922. godine vezuje se početak izučavanja teorije fiksne tačke u metričkim prostorima.*

Pored klasičnog Banachovog dokaza iz rada [12], izloženi su i drugi dokazi pomenute teoreme iz sledećih radova: Joseph i Kwack [80], Palais [108], Boyd i Wong [21].

Date su primene pomenute teoreme kod izučavanja perturbacije invertibilnog ograničenog linearnog operatora na Banachovom prostoru, kod izučavanja egzistencije rešenja jednačina. Razmatraju se obične jednačine, sistem od $n-$linearnih algebarskih jednačina, diferencijalne jednačine i integralne jednačine.

1.1 Uvod

Fiksne tačke preslikavanja izučavanju se u matematičkoj disciplini Teorija o fiksnim tačkama. Teorija fiksnih tačaka je jedna od glavnih grana nelinearne analize. Brojna pitanja fizike, hemije, biologije i drugih nauka vode do različitih diferencijalnih i integralnih jednačina. Ako zanemarimo konkretnu formu tih jednačina, možemo ih svesti na apstraktne operatorske jednačine čime je rešavanje polaznih jednačina svedeno na određivanje fiksnih tačaka operatora.

Definicija 1.1.1 *Neka je X neprazan skup i $f : X \mapsto X$. Kaže se da funkcija f ima fiksnu(nepokretnu) tačku ako postoji $x \in X$ tako da je*

$$f(x) = x.$$

Tada se element x naziva fiksna(nepokretna) tačka funkcije f.

Skup svih fiksnih tačaka funkcije f označavamo sa $Fixf$ ili F_f. Navešćemo nekoliko primera:

Primer 1.1.1 *Neka je $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x^2 + 5x + 4$. Tada funkcija f ima samo jednu fiksnu tačku, tj. $F_f = \{-2\}$.*

Primer 1.1.2 *Za preslikavanje $f(x) = x^2 - x$, gde je $X = \mathbb{R}$, skup svih fiksnih tačaka je $F_f = \{0, 2\}$.*

Primer 1.1.3 *Za $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x + 2$ je $F_f = \emptyset$.*

Primer 1.1.4 *Ako je $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x$, skup fiksnih tačaka preslikavanja f je cela realna prava, tj. $F_f = \mathbb{R}$.*

Teorija fiksnih tačaka proučava pod kojim uslovima fiksne tačke postoje(jedna ili više), metode za njihovu aproksimaciju u slučaju kada postoje i strukturu skupa F_f.

Napomena 1.1.1 *Posmatrajmo operatorsku jednačinu $Ax = y$, pri čemu je $A : X \mapsto X$ linearno preslikavanje, a X vektorski prostor. Ovu jednačinu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku*

$$Bx = x, \; Bx = x + Ax - y,$$

čime smo problem rešavanja polazne jednačine sveli na određivanje fiksne tačke operatora B.

Mnogi problemi operatorskih jednačina se prevode na problem fiksne tačke. U realnoj analizi, nula funkcije $f(x)$, koja je definisana na ograničenom intervalu, može se odrediti nalaženjem fiksne tačke funkcije $g(x) = f(x) + x$.

U sledećoj teoremi navedena je klasa funkcija koje imaju fiksnu tačku.

Teorema 1.1.1 *Neka je* $-\infty < a < b < \infty$ *i* $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ *neprekidna funkcija. Tada* f *ima fiksnu tačku na intervalu* $[a, b]$.

Dokaz: Neka je $F(x) = x - f(x)$. Ako je $a = f(a)$ ili $b = f(b)$, tada je a odnosno b fiksna tačka. U suprotnom je $a < f(a)$ i $b > f(b)$, pa je

$$\begin{aligned} F(a) &= a - f(a) < 0 \\ F(b) &= b - f(b) > 0. \end{aligned}$$

Kako je F neprekidna funkcija, postoji $u \in (a, b)$ takvo da je $F(u) = 0$ tj. $u = f(u)$. □

Ova teorema pokazuje da neprekidna i ograničena funkcija ima fiksnu tačku. Da je uslov ograničenosti neophodan, pokazuje sledeći primer.

Primer 1.1.5 *Neka je* $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 + a$, $a > \frac{1}{4}$, *pri čemu je* a *proizvoljna konstanta. Tada je*

$$f(x) - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} > 0, \ \textit{za}\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Očigledno, funkcija f *nema fiksnu tačku.*

Naredna teorema govori o postojanju fiksne tačke diferencijabilnih funkcija.

Teorema 1.1.2 *Neka je* $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ *diferencijabilna funkcija za koju postoji* $L \in [0, 1)$ *tako da je*

$$|f'(x)| \leq L < 1, \quad x \in [a, b].$$

Tada funkcija f *ima samo jednu fiksnu tačku.*

Dokaz: Funkcija f je neprekidna(jer je diferencijabilna) pa na osnovu Teoreme 1.1.1 ima bar jednu fiksnu tačku. Dokažimo da je ta fiksna tačka jedinstvena. Pretpostavimo suprotno, tj. da funkcija f ima dve fiksne tačke x_1 i x_2. Tada postoji $c \in [a, b]$ tako da je

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

što je kontradikcija. □

Sledeće teoreme su dokazali Brouwer i Schauder i odnose se na postojanje fiksnih tačaka neprekidnih preslikavanja. Dokazi ovih teorema se mogu naći u [94].

Teorema 1.1.3 *(Brouwer) Neka je $K[0,1] \subset \mathbb{R}^n$ zatvorena jedinična kugla. Svako neprekidno preslikavanje $f : K[0,1] \mapsto K[0,1]$ ima fiksnu tačku.*

Ideja za dokaz Brouwerove teoreme potiče iz rezultata Henrija Poincaréa iz 1886. godine. Brouwer je 1909. godine dokazao teoremu za $n = 3$, dok je 1910. godine Hadamard izložio dokaz ove teoreme za svako $n \in \mathbb{N}$. Dve godine kasnije Brouwer je na drugi način dokazao ovu teoreme u slučaju kada je n proizvoljan broj. Rezultate koji su ekvivalentni Brouwerovoj teoremi dokazao je P. Bohl 1904. godine.

Brouwerova teorema važi u konačno-dimenzionalnim normiranim prostorima, a na beskonačno-dimenzionalnim Banachovim prostorima koristi se sledeća Schauderova teorema.

Teorema 1.1.4 *(Schauder) Svako neprekidno preslikavanje $f : K \mapsto K$, kompaktnog, konveksnog podskupa K Banachovog prostora X ima fiksnu tačku.*

Prirodno se nameće pitanje, da li postoji šira klasa funkcija definisanih u metričkim prostorima koje imaju fiksnu tačku? Traženje odgovora na ovo pitanje vodi nas do pojma kontrakcije u metričkim prostorima, tj. do kontraktivnih preslikavanja.

1.2 Banachov princip kontrakcije

U ovoj sekciji izlažemo čuvenu Banachovu teoremu o fiksnoj(nepokretnoj) tački; ona se često naziva i *Banachov princip kontrakcije. Za ovaj princip iz 1922. godine vezuje se početak izučavanja teorije fiksne tačke u metričkim prostorima.*

Definicija 1.2.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$ je*

(a) Lipschitzovo (L-Lipschitzovo) ako postoji $L \geq 0$ tako da je

$$d(fx, fy) \leq L \cdot d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X;$$

(b) *kontrakcija(q−kontrakcija) ako je f q−Lipschitzovo, za* $q \in [0,1)$*, tj.*

$$d(fx, fy) \leq q \cdot d(x,y), \text{ za svako } x,y \in X; \tag{1.1}$$

(c) *neekspanzivno ako je f 1−Lipschitzovo;*

(d) *kontraktivno ako je*

$$d(fx, fy) < d(x,y), \text{ za svako } x,y \in X,\ x \neq y;$$

(e) *izometrija ako je*

$$d(fx, fy) = d(x,y), \text{ za svako } x,y \in X.$$

Navešćemo nekoliko primera ovih preslikavanja.

Primer 1.2.1 *Preslikavanje* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *definisano sa* $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ *je kontrakcija pri čemu je* $F_f = \{6\}$.

Primer 1.2.2 *Preslikavanje* $f : [1/2, 2] \mapsto [1/2, 2]$ *definisano sa* $f(x) = 1/x$. *je 4-Lipschitzovog preslikavanje. Skup njegovih fiksnih tačaka je* $F_f = \{1\}$.

Primer 1.2.3 *Preslikavanje* $f : [1, +\infty) \mapsto [1, +\infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *je kontraktivno i* $F_f = \emptyset$.

Primer 1.2.4 *Preslikavanja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$ *je izometrija. U tom slučaju je* $F_f = \emptyset$.

Primetimo da je preslikavanje koje zadovoljava Lipschitzov uslov neprekidno. Sledeća teorema naziva se Banachov princip kontrakcije. Ona, između ostalog, pokazuje da je za izučavanje fiksnih tačaka kontrakcija dovoljno posmatrati kompletne metričke prostore. Kontraktivna i neekspanzivna preslikavanja zahtevaju bogatiju strukturu prostora koja bi im obezbedila postojanje fiksne tačke.

Teorema 1.2.1 *(Banach [12])(Banachov princip kontrakcije) Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor i* $f : X \mapsto X$ *kontrakcija. Tada preslikavanje f ima samo jednu fiksnu tačku.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka prostora X. Formirajmo niz (x_n) tačaka prostora X pomoću $x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$. Dokažimo da je taj niz konvergentan. S obzirom da je po pretpostavci metrički prostor X kompletan, dovoljno je dokazati da je niz (x_n) Cauchyev. Neka je $a = d(x_0, x_1)$. Iz

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \\ &\le \ldots \le q^n \cdot d(x_0, x_1) = a \cdot q^n, \end{aligned}$$

za $m > n$ sledi

$$d(x_n, x_m) \le \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \le a \cdot \sum_{k=n}^{m-1} q^k \le a \cdot \sum_{k=n}^{\infty} q^k = a \cdot \frac{q^n}{1-q}. \tag{1.2}$$

Odatle, zato što je $0 \le q < 1$, sledi (x_n) je Cauchyev niz. Prema tome, postoji $x \in X$ tako da niz (x_n) konvergira ka x. Dokažimo da je x fiksna tačka preslikavanja f. Zaista, iz

$$0 \le d(x_n, f(x)) = d(f(x_{n-1}), f(x)) \le q \cdot d(x_{n-1}, x),$$

a kako $x_n \to x$, sledi $x_n \to f(x)$, kad $n \to \infty$, te je $f(x) = x$.

Dokažimo jedinstvenost fiksne tačke. Ako bi postojala još jedna tačka $y \in X,\ y \ne x$, sa svojstvom $f(y) = y$, tada iz

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x, y)$$

sledi $(1-q)d(x, y) \le 0$, što je suprotno pretpostavci, jer je $0 \le q < 1$. □

Dokaz Teoreme 1.2.1: (Joseph i Kwack [80])

Neka je $c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}$. Ako je $c > 0$, tada je $c/q > c$ i postoji $x \in X$ tako da je

$$d(f(x), f(f(x))) \le q d(x, fx) < c,$$

što je kontradikcija. Prema tome $c = 0$. Neka je $\{x_n\}$ niz u X tako da $d(x_n, f(x_n)) \to 0,\ n \to \infty$. Primetimo da je x_n Cauchyev niz, jer iz

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_m)) + d(f(x_m), x_m)$$

sledi

$$(1-q)d(x_n, x_m) \le d(x_n, f(x_n)) + d(x_m, f(x_m)).$$

Prema tome, postoji $p \in X$, tako da je $lim_n x_n = p$, a iz $\lim d(x_n, f(x_n)) = p$, sledi $\lim f x_n = p$. Iz $d(f(x_n), f(p)) \leq q d(x_n, p)$, sledi $\lim_n f(x_n) = f(p)$, i prema tome $f(p) = p$. Jedinstvenost fiksne tačke preslikavanja f sledi iz kontraktivnog uslova samog preslikavanja f. $\square$

Dokaz Teoreme 1.2.1: (Palais [108]) Neka je $x_1, x_2 \in X$. Tada je

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), x_2),$$

odnosno

$$(1 - q) d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_2), x_2).$$

Tako dobijamo *Fundamentalnu kontrakcijsku nejednakost*

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1-q} \cdot [d(x_1, f(x_1)) + d(x_2, f(x_2))], \text{ za svako } x_1, x_2 \in X. \quad (1.3)$$

Ukoliko su x_1, x_2 fiksne tačke preslikavanja f, tada iz (1.3) sledi $x_1 = x_2$, tj., kontrakcija može imati najviše jednu fiksnu tačku.

Neka je $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$, i $x_1 = f^n(x)$, $x_2 = f^m(x)$. Iz (1.3) imamo

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq \frac{1}{1-q} \cdot [d(f^n(x), f(f^n(x))) + d(f^m(x), f(f^m(x)))] \quad (1.4) \\ &\leq \frac{q^n + q^m}{1-q} \cdot d(x, f(x)). \quad (1.5) \end{aligned}$$

Kako je $0 \leq q < 1$, sledi $\lim_n q^n = 0$, i zato $d(f^n(x), f^m(x)) \to 0$, kad $n \to \infty$ i $m \to \infty$. Prema tome, Cauchyev niz $\{f^n(x)\}$ je konvergentan,tj., postoji $p \in X$ tako da je $\lim_n f^n(x) = p$. Zbog neprekidnosti funkcije f, imamo $f(p) = f(\lim_n f^n(x)) = \lim_n f(f^n(x)) = p$. Primetimo, da kad u (1.4) uzmemo $m \to \infty$, imamo

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x, f(x)). \quad \square \quad (1.6)$$

Dokaz Teoreme 1.2.1: (Boyd i Wong [21])

Za $x \in X$, definišimo $\varphi(x) = d(x, fx)$. Kako je f kontrakcija, sledi $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija i $\varphi(f^n x) \to 0$ kad $n \to \infty$, za svako $x \in X$. Neka je

$$C_m = \left\{ x \in X : \varphi(x) \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Iz prethodnih uslova, sledi C_m je zatvoren i neprazan podskup u X, za svako $m = 1, 2, \ldots$. Procenimo diametar skupa C_m. Neka je $x, y \in C_m$. Tada je

$$d(x,y) \le d(x,fx) + d(fx,fy) + d(fy,y) \le \frac{2}{m} + qd(x,y).$$

Prema tome,

$$\text{diam } C_m \le \frac{2}{m(1-q)}.$$

Kako su C_m zatvoreni, neprazni podskupovi u X, $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$, i $diam C_m \to 0$, kad $m \to \infty$, na osnovu Cantorove teoreme o preseku, sledi $\bigcap_m C_m = \{\xi\}$.

Kako je $f(C_m) \subset C_m$, za svako m, sledi ξ je fiksna tačka preslikavanja f, i očigledno je jedinstvena fiksna tačka. (Primetimo da je $f(\xi) = f(\bigcap_m C_m) \subset \bigcap_m f(C_m) \subset \bigcap_m C_m = \{\xi\}$.)

Za svako $x \in X$, imamo

$$d(f^n x, \xi) = d(f^n x, f^n \xi) \le q^n d(x,\xi) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Kako je

$$d(x,\xi) \le d(x,fx) + d(fx,f\xi) \le d(x,fx) + qd(x,\xi),$$

imamo

$$d(x,\xi) \le \frac{d(x,fx)}{1-q}.$$

Prema tome, ponovo imamo procenu

$$d(f^n(x),\xi) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x,f(x)). \quad \square \tag{1.7}$$

Napomena 1.2.1 *Dokaz Banachovog principa kontrakcije daje metod za nalaženje fiksne tačke x kontrakcije f. On se obično zove Picardov iterativni proces, (ili metod sukcesivnih aproksimacija), a sastoji se u tome da se polazeći od proizvoljne tačke $x_0 \in X$ ("nulte aproksimacije") formira niz $x_n = f(x_{n-1})$ koji konvergira ka x. Osim toga, kad u (1.2) uzmemo da $m \to \infty$, sledi*

$$d(x_n, x) \le a \cdot \frac{q^n}{1-q}, \quad \textit{gde je} \ \ a = d(x_0, x_1),$$

što daje procenu greške koja se čini ako se tačno rešenje x jednačine $f(z) = z$ zameni približnom vrednošću x_n.

Sada ćemo navesti neke posledice Banachove teoreme.

Posledica 1.2.1 *Neka je S zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora (X,d) i neka je $f : S \mapsto S$ kontrakcija. Ako je $x_0 \in S$ proizvoljna tačka i $x_{n+1} = fx_n$, $n \geq 0$, onda niz $\{x_n\}$ konvergira ka fiksnoj tački preslikavanja f.*

Uslov da je S zatvoren podskup u X je neophodan. To pokazuje sledeći primer.

Primer 1.2.5 *Neka je $X = \mathbb{R}$ Banachov prostor sa uobičajenom metrikom $d(x,y) = |x-y|$, $S = K(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ i $p \in \mathbb{R}$, $|p| = 1$. Tada je*

$$f : S \mapsto S,\ f(x) = \frac{x+p}{2},$$

kontrakcija i f nema fiksnu tačku.

Posledica 1.2.2 *Neka je $f : X \mapsto X$ $q-$kontrakcija kompletnog metričkog prostora X i $z \in X$ fiksna tačka preslikavanja f. Tada je:*

1) niz $\{f^n(x)\}$ konvergentan za svako $x \in X$, i konvergira ka z;

2) $d(x,z) \leq \frac{1}{1-q} \cdot d(x,fx)$;

3) $d(f^n x, z) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x,fx)$;

4) $d(f^{n+1}x, z) \leq q \cdot d(fx, x)$;

5) $d(f^{n+1}x, z) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(f^n x, f^{n+1}x)$.

Dokaz: Pokazaćemo samo drugo i treće svojstvo, dok se ostala dokazuju analogno.

$$\begin{aligned} 2)\ d(x,z) &= \lim_{n\to\infty} d(x, f^n x) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d(f^k x, f^{k+1}x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d(f^k x, f^{k+1}x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k d(x, fx) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-q} \cdot d(x, fx)$$

3) Iz uslova $f(z) = z,$ sledi $f^n z = z,$ pa je na osnovu prvog dela dokaza

$$d(f^n x, z) = d(f^n x, f^n z) \leq q^n d(x, z) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x, fx). \ \square$$

Primer 1.2.6 *Neka je X Banachov prostor, i neka su A i B ograničeni linearni operatori na X. Ako je A invertibilan operator i $\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\|^{-1} < 1$, tada se Banachov princip kontrakcije može primeniti da se pokaže da je B invertibilan operator.*

Da dokažemo da je B invertibilan operator, pokazaćemo da za svako $y \in X$, postoji samo jedno $x \in X$ tako da je $Bx = y$. Neka je $y \in X$. Ako je $Bx_0 = y$ za neko $x_0 \in X$, tada imamo

$$y = Bx_0 = (B - A)x_0 + Ax_0.$$

Posle množenja sa A^{-1}, imamo

$$A^{-1}y = A^{-1}(B - A)x_0 + x_0.$$

Da skratimo označavanje, neka je $z = A^{-1}y$ i $C = A^{-1}(B - A)$. Prema tome $x_0 = z - Cx_0$.

Definišimo sada funkciju $f : X \mapsto X$ sa $f(x) = z - Cx$. Ako dokažemo da je f kontrakcija, tada je x_0 fiksna tačka funkcije f, (primetimo da je $f(x) = x$ ekvivalentno sa $x = z - Cx$).

Neka su x i y elementi iz X. Tada je

$$\|f(x) - f(y)\| = \|C(x - y)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \|x - y\|.$$

Prema tome, iz pretpostavke, $\|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| < 1$, sledi f je kontrakcija. Ovo nam ukazuje da je x_0 tražena fiksna tačka preslikavanja f.

U dokazu Banachovog principa kontrakcije koriste se sukcesivne iteracije kontrakcije. U slučaju iz ovog primera, nekoliko prvih iteracija funkcije f su

$$z - Cx, z - C(z - Cx) = z - Cx + C^2x, z - Cx + C^2x - C^3x,$$

i zato što je $\|C\| < 1$, ovaj niz konvergira ka $z - Cx + C^2x - C^3x + \cdots$.

Ako je $A = I$ identičan operator i $\|C\| < 1$, tada se direktno može ustanoviti da je $I - C + C^2 - C^3 + \cdots$ inverz od $I + C$. To sledi iz

$$(I + C)(I - C + C^2 - \cdots + (-1)^n C^n) = I - C^{n+1},$$

zato što je $\lim_n I - C^{n+1} = I$. Opšti slučaj sledi iz prethodnog, zato što je $A + (B - A) = A(I + A^{-1}(B - A))$. Primetimo da se dokaz da je B invertibilan operator može izvesti i ne koristeći Banachov princip kontrakcije.

Sledeći rezultat se odnosi na preslikavanje čiji je neki stepen kontrakcija.

Posledica 1.2.3 *(Bryant [24])Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ preslikavanje tako da je f^n kontrakcija za neko $n \geq 1$. Tada jednačina $fx = x$ ima jedinstveno rešenje.*

Dokaz: Postoji samo jedno $z \in X$ tako da je $f^n z = z$. Kako je $f^n(fz) = f(f^n(z)) = fz$, sledi $fz = z$. Ako je $fu = u, u \in X$, tada je $f^n u = u$, odnosno $u = z$. $\square$

Preslikavanje f koje zadovoljava uslov iz prethodne posledice, kao što je primetio (Bryant [24]), ne mora biti neprekidno.

Primer 1.2.7 *(Bryant [24]) Neka $f : [0, 2] \mapsto [0, 2]$ tako da je $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$, i $f(x) = 1$, $x \in (1, 2]$. Tada je $f^2(x) = 0$ za svako $x \in [0, 2]$, odnosno $f^2 : [0, 2] \mapsto [0, 2]$ je kontrakcija, a f je prekidna funkcija.*

Sledeći rezultat predstavlja lokalnu verziju Banachovog principa kontrakcije.

Teorema 1.2.2 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $x_0 \in X$, $r > 0$ i $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Neka je $f : K(x_0, r) \mapsto X$ $q-$kontrakcija, tj., za $q \in [0, 1)$,*

$$d(fx, fy) \leq q \cdot d(x, y), \text{ za svako } x, y \in K(x_0, r), \tag{1.8}$$

i pretpostavimo da je

$$d(fx_0, x_0) < (1 - q)r. \tag{1.9}$$

Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku u $K(x_0, r)$.

Dokaz: Postoji $r_0 \in [0, r)$ tako da je $d(fx_0, x_0) \leq (1-q)r_0$. Dokažimo da $f : \overline{K(x_0, r_0)} \mapsto \overline{K(x_0, r_0)}$, gde je $\overline{K(x_0, r_0)}$ zatvorenje skupa $K(x_0, r_0)$. Neka je $x \in \overline{K(x_0, r_0)}$. Tada je

$$\begin{aligned} d(fx, x_0) &\leq d(fx, fx_0) + d(fx_0, x_0) \\ &\leq q \cdot d(x, x_0) + (1-q)r_0 \leq r_0. \end{aligned}$$

Prema tome, na osnovu Banachovog principa kontrakcije funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku u $\overline{K(x_0, r_0)}$. Lako se dokazuje jedinstvenost fiksne tačke u $K(x_0, r)$. $\square$

Sledeći rezultat se odnosi na Banachove prostore.

Teorema 1.2.3 *Neka je X Banachov prostor, $r > 0$ i $\overline{K(0, r)} = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ zatvorena kugla sa centrom u 0 i poluprečnikom r u X. Neka je $f : \overline{K(0, r)} \mapsto X$ $q-$kontrakcija, tj., za $q \in [0, 1)$,*

$$\|fx - fy\| \leq q \cdot \|x - y\|, \text{ za svako } x, y \in \overline{K(0, r)}, \tag{1.10}$$

i pretpostavimo da je $f(\partial(\overline{K(0, r)}) \subset \overline{K(0, r)}$, gde je $\partial(\overline{K(0, r)}$ rub skupa $\overline{K(0, r)}$. Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku u $\overline{K(0, r)}$.

Dokaz: Neka je $x \in \overline{K(0, r)}$, $x \neq 0$, i označimo sa $\hat{x} = (r/\|x\|)x$. Primetimo da je $\hat{x} \in \overline{K(0, r)}$. Dokažimo da je

$$\frac{x + f(x)}{2} \in \overline{K(0, r)}. \tag{1.11}$$

Kako je

$$\|f(x) - f(\hat{x})\| \leq q \cdot \|x - \hat{x}\| = \frac{q}{\|x\|} \cdot \|(r - \|x\|)x\| = q(r - \|x\|),$$

imamo

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f(\hat{x})\| + \|f(\hat{x})\| \leq q(r - \|x\|) + r \leq 2r - \|x\|.$$

Prema tome

$$\left\|\tfrac{x+f(x)}{2}\right\| \leq \frac{\|x\| + \|f(x)\|}{2} \leq r.$$

Ovim smo dokazali (1.11). Primetimo da postoji niz $x_n \in \overline{K(0,r)} \setminus \{0\}$, tako da je $\lim_n x_n = 0$. Sada, zbog neprekidnosti norme i funkcije f, sledi

$$\left\|\tfrac{0+f(0)}{2}\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\tfrac{x_n+f(x_n)}{2}\right\| \leq r.$$

Prema tome, sa

$$g(x) = \frac{x+f(x)}{2}, \quad x \in \overline{K(0,r)},$$

dobro je definisana funkcija $g : \overline{K(0,r)} \mapsto \overline{K(0,r)}$. Kako, za svako $x, y \in \overline{K(0,r)}$, imamo

$$\|g(x) - g(y)\| = \left\|\tfrac{x-y+f(x)-f(y)}{2}\right\| \leq \frac{\|x-y\| + \|f(x) - f(y)\|}{2}$$

$$\leq \frac{\|x-y\| + q\|x-y\|}{2} = \frac{(1+q)}{2} \cdot \|x-y\|,$$

sledi g je kontrakcija. Na osnovu Banachovog principa kontrakcije funkcija g ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in \overline{K(0,r)}$. Lako se dokazuje da je u jedinstvena fiksna tačka funkcije f u $\overline{K(0,r)}$. $\square$

1.3 Primene na egzistenciju rešenja jednačina

Glavni cilj ove sekcije je da ilustruje kako, neke važne, tipične funkcionalne jednačine primenjene matematike možemo da prevedemo na ekvivalentni problem fiksne tačke. Ovo, delom, motiviše naše interesovanje za izučavanje procedura iteracije fiksne tačke.

1.3.1 Obične jednačine

Neka je $-\infty < a < b < \infty$ i $f : [a,b] \mapsto [a,b]$. Primenimo Banachov stav na rešavanje jednačine $f(x) = x$. Za to je, na primer, dovoljno da pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je $|f'(x)| \leq q < 1$, $x \in [a,b]$, gde je $q \in (0,1)$. Zaista, tada je na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti, za svako x, y iz $[a,b]$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq q|x-y|,$$

što, s obzirom na definiciju metrike na realnoj pravoj, znači da je f kontrakcija. Prema tome, ako realna funkcija f preslikava $[a,b]$ u samog sebe i $|f'(x)| \leq$

$q < 1$, jednačina $f(x) - x = 0$ ima u $[a, b]$ jedno i samo jedno rešenje x^*. Ono se sukcesivno može odrediti, polazeći od proizvoljnog $x_0 \in [a, b]$, formiranjem niza $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$. Pri tome za približno rešenje x_n važi

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Da bismo u praksi obezbedili da $f(x)$ zadovoljava uslove za primenu Banachovog stava postupamo ovako. Neka je data jednačina $F(x) = 0$ za $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ i $0 < m \leq F'(x) \leq M$ za svako $x \in [a, b]$. Stavićemo $f(x) = x - \lambda F(x)$, a parametar λ ćemo naknadno odrediti. Jednačina $F(x) = 0$ ekvivalentna je tada jednačini $f(x) = x$; no kako je $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, to je

$$1 - \lambda M \leq f'(x) \leq 1 - \lambda m.$$

Sada biramo λ tako da je ispunjeno ograničenje za $f'(x)$ koje opravdava primenu Banachovog stava.

1.3.2 Sistem od $n-$linearnih algebarskih jednačina

Neka je

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}$$

sistem od n linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih.

Napišimo ga u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
&x_1 = +(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \\
&x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2 \\
&\vdots \\
&x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1 - a_{nn})x_n + b_n.
\end{aligned}$$

Ako je

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}, \text{ gde je } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

imamo

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.12}$$

Definišimo preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, gde su koordinate y_i, $i = 1, 2, \dots, n$ određene sa

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Fiksne tačke preslikavanja f su rešenja sistema (1.12). Ostaje još da vidimo pod kojim uslovima će f biti kontrakcija. Odgovor na ovo pitanje zavisi od izbora metrike u prostoru $\mathbb{R}^n$. Razmotrimo tri slučaja:

1.) Prostor $\mathbb{R}^n$ sa metrikom

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Na osnovu nejednakosti Cauchy-Bunjakovskog dobijamo

$$d^2(y', y'') = \sum_i (\sum_j c_{ij} (x_j' - x_j'')^2) \leq (\sum_i \sum_j c_{ij}^2) \cdot d^2(x', x'')$$

tj.

$$d(y', y'') \leq \left(\sum_i \sum_j c_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} d(x', x'')$$

Prema tome, uslov kontrakcije je

$$\left(\sum_i \sum_j c_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha < 1. \tag{1.13}$$

2.) Prostor $\mathbb{R}^n_\infty$ sa metrikom

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
d(y', y'') &= \max_i |y_i^{'} - y_i^{''}| = \max_i |\sum_j c_{ij}(x_j' - x_j^{''})| \\
&\leq \max_i \sum_j |c_{ij}||x_j' - x_j^{''}| \leq \max_i \sum_j |c_{ij}| \max_j |x_j' - x_j^{''}| \\
&= (\max_i \sum_j |c_{ij}|) \cdot d(x', x^{''})
\end{aligned}
$$

Prema tome, f je kontrakcija uz uslov

$$
\sum_j^n |c_{ij}| \leq \alpha < 1 \text{ za } i = 1, \ldots, n. \tag{1.14}
$$

3.) Prostor $\mathbb{R}_1^n$ sa metrikom

$$
d(x, y) = \sum_i^n |x_i - y_i|.
$$

Dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
d(y', y'') &= \sum_i |y_i^{'} - y_i^{''}| = \sum_i |\sum_j c_{ij}(x_j' - x_j^{''})| \\
&\leq \sum_i \sum_j |c_{ij}||x_j' - x_j^{''}| = \sum_j |x_j' - x_j^{''}| \sum_i |c_{ij}| \\
&\leq \max_j \{\sum_i |c_{ij}|\} \cdot \sum_j |x_j' - x_j^{''}| = \max_j \{\sum_i |c_{ij}|\} \cdot d(x', x^{''})
\end{aligned}
$$

Prema tome uslov da je f kontrakcija svodi se na

$$
\sum_i |c_{ij}| \leq \alpha < 1 \text{ za } j = 1, \ldots, n. \tag{1.15}
$$

Videli smo, da uslov kontrakcije, odnosno, uslov koji zadovoljava matrica $\|c_{ij}\|$ da bi preslikavanje bilo kontrakcija zavisi od metrike na $\mathbb{R}^n$. Svaki od uslova (1.13), (1.14) i (1.15) je samo dovoljan da bi f bila kontrakcija. Bilo koji od njih će biti zadovoljen ako je $|c_{ij}| < \frac{1}{n}$.

1.3.3 Diferencijalne jednačine

Pokažimo kako se pomoću Banachovog principa kontrakcije mogu dobiti teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja za neke tipove diferencijalnih jednačina.

Neka je data diferencijalna jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \tag{1.16}$$

sa početnim uslovom

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.17}$$

Pretpostavimo da je u pravougaoniku

$$P = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$$

1^0 $g(t, x)$ neprekidna, te je $|g| \leq M$;

2^0 $|g(t, x_1) - g(t, x_2)| \leq K \cdot |x_1 - x_2|$.

Pokazaćemo da postoji $h > 0$, tako da u segmentu $[t_0 - h, t_0 + h] = \Delta$ postoji jedno i samo jedno rešenje diferencijalne jednačine (1.16) koje zadovoljava dati početni uslov (Teorema Picarda).

Pre svega, posmatranom problemu može se dati i ova formulacija: Pod navedenim pretpostavkama, postoji jedno i samo jedno rešenje integralne jednačine

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(t,\ x(t))\, dt. \tag{1.18}$$

Neka je broj h takav da je

3^0 $h < \frac{1}{K}$ i $h \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Uočimo prostor C_Δ funkcija neprekidnih na segmentu Δ, i njegov podskup A za koji je

$$\max_t |x(t) - x_0| \leq b.$$

S obzirom na metriku u C_Δ skup A je zatvoren, jer se sastoji iz tačaka zatvorene kugle $K[x_0, b]$.

Neka je preslikavanje $y = f(x)$, $x \in A \subset C_\Delta$ definisano sa

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, x(t))\, dt \tag{1.19}$$

Pokazaćemo da $f : A \mapsto A$ i da je f kontrakcija.

(i) Pre svega, ako $x \in A$ i $t \in \Delta$ tačka $(t, x(t)) \in P$, tj. desna strana u (1.19) ima smisla i očigledno $y \in C_\Delta$. Da bismo dokazali da $y \in A$, primetimo da je, prema 1^0 i na osnovu druge nejednačine u 3^0,

$$|y(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} g(t, x(t)) dt \right| \leq M|t - t_0| \leq M \cdot h \leq M \, \frac{b}{M} = b.$$

(ii) Neka x_1, $x_2 \in A$. Tada je za $t \in \Delta$, na osnovu 2^0,

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [g(t, x_1(t)) - g(t, x_2(t))] dt \right| \\ &\leq K \cdot \int_{t_0}^{t} |x_1(t) - x_2(t)| \, |dt| \\ &\leq K \cdot h \cdot \max |x_1(t) - x_2(t)|. \end{aligned}$$

Prema nejednačini u 3^0, $K \cdot h = q < 1$; na osnovu definicije rastojanja u C_Δ je, dakle,

$$d(y_1, y_2) \leq q \cdot d(x_1, x_2),$$

tj. f je kontrakcija.

Kako je prostor C_Δ kompletan, a A zatvoren podskup u C_Δ, to su svi uslovi za primenu Banachovog stava zadovoljeni, tj. preslikavanje (1.18) ima jednu jedinu fiksnu tačku, a to je jedino rešenje integralne jednačine (1.19) odnosno postavljenog diferencijalnog zadatka.

1.3.4 Integralne jednačine

Sada ćemo metod kontrakcija primeniti za dokazivanje egzistencije i jedinstvenost rešenja nehomogene integralne Fredholmove jednačine drugog reda, tj. za jednačine oblika:

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \, x(t) \, dt + g(s) \tag{1.20}$$

gde je jezgro $K(s, t)$ neprekidno u kvadratu $P = [a, b] \times [a, b]$, funkcija $g(s)$ neprekidna u $[a, b]$ i λ realan parametar. Funkcija $x(t)$ je nepoznata funkcija koju treba odrediti.

Neprekidno rešenje ove integralne jednačine možemo shvatiti kao fiksnu tačku preslikavanja $y = f(x)$, $x = x(t) \in C[a, b]$ određenog sa

$$y(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)x(t)dt + g(s).$$

Jasno, $f : C[a, b] \mapsto C[a, b]$, a kako je $C[a, b]$ kompletan prostor, ostaje još jedino da vidimo pod kojim uslovima je f kontrakcija.

Ako je

$$\max_{(s,t)\in P} |K(s, t)| = M,$$

tada iz $x_1, x_2 \in C[a, b]$ sledi

$$\begin{aligned} |y_1(s) - y_2(s)| &\leq |\lambda| \int_a^b |K(s, t)|\,|x_1(t) - x_2(t)|dt \\ &\leq |\lambda|\, M \max_{a\leq t\leq b} |x_1(t) - x_2(t)|(b - a), \end{aligned}$$

što s obzirom na metriku u $C[a, b]$ daje

$$d(y_1, y_2) \leq M\,|\lambda|(b - a)d(x_1, x_2).$$

Prema tome, ako je $|\lambda| < \frac{1}{M}(b - a)$, f je kontrakcija, i na osnovu Banachovog stava niz sukcesivnih aproksimacija konvergira jedinom neprekidnom rešenju nehomogene Fredholmove jednačine. Primećujemo da je ovim stavom obezbeđeno rešenje Fredholmove jednačine samo za male vrednosti parametra $|\lambda|$.

Glava 2

Preslikavanja kontraktivnog tipa

Mnogi autori su definisali preslikavanja kontraktivnog tipa na kompletnom metričkom prostoru X koja su uopštenja dobro poznate Banachove kontrakcije. U mnogim slučajevima takva preslikavanja imaju jedinstvenu fiksnu tačku, i ona se može dobiti koristeći Picardovu iteraciju, počevši od neke početne tačke $x_0 \in X$.

U ovoj glavi iznosimo pojedine rezultate u vezi pomenute problematike. Napomenimo da su, između ostalog, izloženi rezultati iz radova: Edelstein [49, 48], Rakotch [111], Boyd i Wong [22], Meir i Keeler [103], Kannan [89], Chatterjea [28], Zamfirescu [150], Ćirić [35, 37], Reich [117], Hardy i Rogers [67], Jungck [81], Das i Naik [46], Sessa [133], Rakočević [113], Fisher [54], Caristi [27], Bollenbacher i Hicks [20], Rhoades [123] i Berinde [15]. Navedeni radovi obuhvataju vremenski period od 1961. godine do 2004. godine, i predstavljaju pregled rezultata iz navedenog vremenskog perioda. Smatramo da bi ovakvo prezentovanje materjala trebalo da omogući mladom čitaocu detaljno upoznavanje sa pomenutom problematikom, i otvori mogućnost za savremena samostalna istraživanja. Napomenimo da je Rhoades [122] 1977. godine objavio veoma značajan rad u kome je izložio pregled i poređenje 250 različitih definicija preslikavanja kontraktivnog tipa.

2.1 Edelsteinovi rezultati

Za preslikavanja $f : X \mapsto X$ na kompletnom metričkom prostoru (X, d) koje zadovoljava uslov

$$d(fx, fy) < \lambda\, d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X, x \neq y, \tag{2.1}$$

gde je $0 \leq \lambda < 1$, Banachov princip kontrakcije obezbeđuje egzistenciju jedinstvene fiksne tačke.

Ukoliko se u uslovu (2.1) uzme $\lambda = 1$, dobija se kontraktivno preslikavanje, tj. preslikavanje koje za svako $x, y \in X$, $x \neq y$ zadovoljava uslov

$$d(fx, fy) < d(x, y). \tag{2.2}$$

Edelstein [49] je 1962. godine objavio rad gde je za izučavanje fiksne tačke kontraktivnih preslikavanja koristio sledeći uslov i pretpostavku.

Uslov (2.2) zajedno sa pretpostavkom da postoji $x \in X$ tako da iterativni niz $\{f^n x\}$ sadrži podniz $\{f^{n_i} x\}$ koji konvergira ka tački iz X, tj.

$$\exists\, x \in X : \{f^n x\} \supset \{f^{n_i} x\} \text{ tako da je } \lim_{i \to \infty} f^{n_i} x \in X, \tag{2.3}$$

obezbeđuje postojanje fiksne tačke preslikavanja f.

Teorema 2.1.1 *(Edelstein [49]) . Neka je X metrički prostor, a $f : X \mapsto X$ kontraktivno preslikavanje koje zadovoljava (2.3). Tada je $u = \lim_{i\to\infty} f^{n_i} x$ jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(u) \neq u$, i posmatrajmo niz $\{f^{n_i+1} x\}$. Tada je $\lim_i f^{n_i+1} x = f(u)$.

Neka je $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}, Y = (X \times X) \setminus \Delta$, i definišimo preslikavanje $r : Y \mapsto \mathbb{R}$, tako da je

$$r(x, y) = \frac{d(fx, fy)}{d(x, y)}. \tag{2.4}$$

Preslikavanje r je neprekidno na Y, pa postoji okolina U tačke (u, fu) tako da iz $(x, y) \in U$ sledi

$$0 \leq r(x, y) < R < 1. \tag{2.5}$$

Neka su $S_1 = S_1(u, \rho)$ i $S_2 = S_2(fu, \rho)$ otvorene kugle sa centrom u u i fu respektivno, i poluprečnikom ρ tako da je

$$\rho < \frac{1}{3}\, d(u, fu) \tag{2.6}$$

i $S_1 \times S_2 \subset U$.

Iz (2.3) sledi postoji prirodan broj N tako da iz $i > N$ sledi $f^{n_i}x \in S_1$, a iz (2.2) sledi $f^{n_i+1}x \in S_2$.

Za $i > N$, iz (2.6) sledi

$$d(f^{n_i}x, f^{n_i+1}x) > \rho, \tag{2.7}$$

a iz (2.4) i (2.5) sledi

$$d(f^{n_i+1}x, f^{n_i+2}x) < Rd(f^{n_i}x, f^{n_i+1}x). \tag{2.8}$$

Prema tome, iz (2.8) za $l > j > N$ sledi

$$\begin{aligned} d(f^{n_l}x, f^{n_l+1}x) &\le d(f^{n_{l-1}+1}x, f^{n_{l-1}+2}x) \\ &< Rd(f^{n_{l-1}}x, f^{n_{l-1}+1}x) \le \dots \\ &< R^{l-j} d(f^{n_j}x, f^{n_j+1}x) \to 0, \quad l \to \infty, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji sa (2.7). Prema tome, $fu = u$.

Pretpostavimo da je $v \neq u$ takođe fiksna tačka preslikavanja f. Tada je

$$d(fu, fv) = d(u, v),$$

što je u kontradikciji sa (2.2). $\square$

Za kompaktne prostore uslov (2.3) je uvek ispunjen. Prema tome, imamo

Teorema 2.1.2 *(Edelstein [49]) . Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka $f : X \mapsto X$. Pretpostavimo da je*

$$d(fx, fy) < d(x, y)$$

za svako x, $y \in X$ za koje je $x \neq y$. Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Iz Teoreme 2.1.1 dobija se sledeća informacija o nizu iteracija.

Teorema 2.1.3 *(Edelstein [49]) Pretpostavimo da su ispunjeni svi uslovi iz Teoreme 2.1.1. Ako niz* $\{f^n(p)\}$, $p \in X$, *sadrži konvergentan podniz* $\{f^{n_i}(p)\}$ *tada* $\lim_n f^n(p)$ *postoji i njegova granica* $u \in X$ *je fiksna tačka preslikavanja* f.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.1.1 imamo $\lim_i f^{n_i}(p) = u$. Za dato $\delta > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da iz $i > n_0$ sledi $d(u, f^{n_i}(p)) < \delta$. Ako je $m = n_i + l > n_i$ tada je

$$d(u, f^m(p)) = d(f^l u, f^{n_i+l}(p)) < d(u, f^{n_i}(p)) < \delta. \quad \square$$

Prema Edelsteinu [49], ukoliko za preslikavanje $f : X \mapsto X$

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \text{iz} \quad 0 < d(x,y) < \varepsilon \quad \text{sledi} \quad (2.2), \tag{2.9}$$

tada se f naziva $\varepsilon-$kontraktivno preslikavanje.

Napomenimo da je $u \in X$ periodična tačka preslikavanja $f : X \mapsto X$ ukoliko postoji prirodan broj k tako da je $f^k u = u$.

Teorema 2.1.4 *(Edelstein [49]) Neka je* X *metrički prostor, a* $f : X \mapsto X$ $\varepsilon-$*kontraktivno preslikavanje koje zadovoljava uslov (2.3). Tada je* $u = \lim_{i\to\infty} f^{n_i} x$ *periodična tačka preslikavanja* f.

Dokaz: Iz (2.3) sledi postoji prirodan broj N_1 tako da iz $i > N_1$ sledi $d(f^{n_i}x, u) < \frac{1}{4}\varepsilon$. Koristeći (2.9), posle $n_{i+1} - n_i$ iteracija, iz zadnje nejednakosti dobijamo

$$d(f^{n_{i+1}}x, f^{n_{i+1}-n_i}u) < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} d(u, f^{n_{i+1}-n_i}u) &\le d(u, f^{n_{i+1}}x) + d(f^{n_{i+1}}x, f^{n_{i+1}-n_i}u) \\ &< \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pretpostavimo da je $v = f^{n_{i+1}-n_i}(u) \neq u$, i zato je preslikavanje $r(x,y)$ definisano sa (2.9) neprekidno u (u,v). Iz (2.9) i (2.10) sledi $r(u,v) < 1$.

Neka su U, S_1 i S_2 definisani kao u dokazu prethodne teoreme (ovde je samo v zamenjeno sa fu). Uslovi (2.5) i (2.6) su opet ispunjeni. Postoji prirodan broj N_2 tako da iz $j > N_2$ sledi

$$(f^{n_j}(x), f^{n_j+n_{i+1}-n_i}(x)) \in S_1 \times S_2.$$

Prema tome

$$d(f^{n_j+1}x, f^{n_j+n_{i+1}-n_i+1}x) < R\, d(f^{n_j}x, f^{n_j+n_{i+1}-n_i}x).$$

Sada, iz $l > j > N_2$ sledi

$$\begin{aligned} d(f^{n_l}(x), f^{n_l+n_{i+1}-n_i}(x)) &\leq d(f^{n_{l-1}+1}x, f^{n_{l-1}+n_{i+1}-n_i+1}x) \\ &< R\, d(f^{n_{l-1}}x, f^{n_{l-1}+n_{i+1}-n_i}x) \leq \dots \\ &< R^{l-j}\, d(f^{n_j}x, f^{n_j+n_{i+1}-n_i}x) \to 0, \quad l \to \infty, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji sa (2.6). Prema tome, za $k = n_{i+1} - n_i$, imamo $f^k u = u$. $\square$

Napomena 2.1.1 *Ako je X kompaktan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ $\varepsilon-$kontraktivno preslikavanje, tada postoji bar jedna periodična tačka preslikavanja f.*

Napomena 2.1.2 *Ako je u Teoremi 2.1.4, ispunjen uslov $d(u, fu) < \varepsilon$, tada je $k = 1$, tj., $fu = u$. Ovo sledi iz*

$$d(f^k u, f^{k+1}u) = d(u, fu),$$

i činjenice da je $fu \neq u$ u kontradikciji sa (2.9).

Edelstein [48] je 1961. godine objavio rad u kome izučava fiksne tačke za širu klasu preslikavanja u odnosu na kontrakcije.

Definicija 2.1.1 *Preslikavanje $f : X \mapsto X$ je lokalno kontraktivno ako za svako $x \in X$ postoje ε i λ (koji zavise od tačke x), $\varepsilon > 0$, $0 \leq \lambda < 1$, tako da iz*

$$p, q \in S(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\} \quad \textit{sledi} \quad (2.1). \tag{2.11}$$

Definicija 2.1.2 *Prslikavanje $f : X \mapsto X$ je $(\varepsilon, \lambda)-$uniformno lokalno kontraktivno, ako je lokalno kontraktivno, a ε i λ ne zavise od $x \in X$.*

Globalno kontraktivno preslikavanje, tj., preslikavanje koje zadovoljava uslov (2.1), može se smatrati $(\infty, \lambda)-$uniformno lokalno kontraktivnim preslikavanjem.

Na specijalnim prostorima svako lokalno kontraktivno preslikavanje je globalno kontraktivno.

Napomenimo sledeću definiciju.

Definicija 2.1.3 *([19] str. 41.) Metrički prostor (X, d) je metrički konveksan ako za svako $x, y \in X$, postoji $z \neq x, y$ tako da je*

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

Lema 2.1.1 *(Menger) Ako je (X, d) kompletan metrički prostor, i metrički konveksan prostor, tada za svako α, $0 < \alpha < 1$, i svako $x, y \in X$, postoji $z \in X$ tako da je*

$$d(x, z) = \alpha d(x, y) \quad i \quad d(z, y) = (1 - \alpha) d(x, y).$$

Dokaz: Videti ([19], Teoremu 4.1 na strani 41).

Primetimo da ako je (X, d) kompletan metrički prostor, i metrički konveksan, tada je $P = \{d(x, y) : x, y \in X\}$ konveksan podskup u $\mathbb{R}$, i prema tome P se svodi na interval $[0, b]$ ili $[0, b)$, za $b \leq \infty$. To ćemo koristiti u sledećim razultatima.

Teorema 2.1.5 *(Edelstein [48]) Neka je X konveksan, kompletan, metrički prostor. Tada, ako je preslikavanje $f : X \mapsto X$ $(\varepsilon, \lambda)-$uniformno lokalno kontraktivno onda je f i globalno kontraktivno preslikavanje sa istim λ.*

Dokaz: Ako $p, q \in X$, tada postoje tačke $p = x_0, x_1, \ldots, x_n = q \in X$ tako da je $d(p, q) = \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$. Prema tome,

$$d(fp, fq) \leq \sum_{i=1}^{n} d(f(x_{i-1}), f(x_i)) < \lambda \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i) = \lambda d(p, q). \quad \square$$

Primer 2.1.1 *(Edelstein [48]) Neka je*

$$X = \left\{ (x, y) | x = \cos t, \; y = \sin t, \; 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \right\}; \; f(t) = \frac{t}{2},$$

a X je sa uobičajenom Euklidovom metrikom. Tada, f je uniformno lokalno kontraktivna preslikavanje, a nije globalno kontraktivno preslikavanje.

Metrički prostor (X, d) je $\eta-$lančasti, $\eta > 0$, ako za svako $a, b \in X$ postoji $\eta-$lanac, koji povezuje a i b, tj., postoje tačke $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \in X$(ovde n zavisi od a i b), tako da je $d(x_{i-1}, x_i) < \eta$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 2.1.6 *(Edelstein [48]) Neka je X kompletan metrički, $\varepsilon-$lančani prostor, a $f : X \mapsto X$ $(\varepsilon, \lambda)-$uniformno lokalno kontraktivno preslikavanje. Tada preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$.*

Dokaz: Neka je x proizvoljna tačka iz X, i posmatrajmo $\varepsilon-$lanac:

$$x = x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n = f(x).$$

Koristeći nejednakosti trougla imamo

$$d(x, fx) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i) < n\varepsilon.$$

Za parove uzastopnih tačaka $\varepsilon-$lanca, uslov (2.11) je zadovoljen.

Neka je $f(f^m x) = f^{m+1}x$, $m = 1, 2, \ldots$. Tada je

$$d(fx_{i-1}, fx_i) < \lambda\, d(x_{i-1}, x_i) < \lambda\varepsilon,$$

odnosno

$$d(f^m x_{i-1}, f^m x_i) < \lambda d(f^{m-1} x_{i-1}, f^{m-1} x_i) < \lambda^m \varepsilon. \tag{2.12}$$

Sada je

$$d(f^m x, f^{m+1} x) \leq \sum_{i=1}^{n} d(f^m x_{i-1}, f^m x_i) < \lambda^m n\varepsilon.$$

Dokažimo da je niz iteracija $\{f^i x\}$ Cauchyev niz. Iz $j, k \in \mathbb{N}$, $j < k$, sledi

$$\begin{aligned} d(f^j x, f^k x) &\leq \sum_{i=j}^{k-1} d(f^i x, f^{i+1} x) < n\varepsilon(\lambda^j + \ldots + \lambda^{k-1}) \\ &< n\varepsilon \frac{\lambda^j}{1-\lambda} \to 0, \quad j \to \infty. \end{aligned}$$

Kako je prostor X kompletan sledi postoji $\lim_{i\to\infty} f^i x$.

Kako je f neprekidno preslikavanje (što sledi iz (2.11)) imamo

$$f\left(\lim_{i\to\infty} f^i x\right) = \lim_{i\to\infty} f(f^i x) = \lim_{i\to\infty} f^{i+1} x = \lim_{i\to\infty} f^i x.$$

Dokažimo jedinstvenost fiksne tačke. Pretpostavimo da postoji još jedna fiksna tačka $v \in X$ preslikavanja f, tj., $u \neq v$ i $fv = v$. Posmatrajmo $\varepsilon-$lanac

$$u = x_0, \ldots, x_k = v.$$

Iz (2.12) sledi

$$\begin{aligned} d(fu, fv) &= d(f^l u, f^l v) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} d(f^l x_{i-1}, f^l x_i) < \lambda^l k\varepsilon \to 0, \quad l \to \infty. \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Prema tome, $u = v$. $\square$

Iz prethodne teoreme može se dobiti jedna posledica u vezi sa ekspanzivnim preslikavanjima. Ovaj tip preslikavanja se definiše tako što se u definicijama 2.1.1 i 2.1.2, uslov $\lambda < 1$ zameni uslovom $\lambda > 1$.

Posledica 2.1.1 *Ako je f injektivno, $(\varepsilon, \lambda)-$uniformno lokalno ekspanzivno preslikavanje metričkog prostora Y na $\varepsilon-$lančasti kompletan metrički prostor $X \supset Y$, tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.*

Ovo tvrđenje je direktna posledica Teoreme 2.1.6, jer su za preslikavanje f^{-1} sve njene pretpostavke ispunjene.

Izložimo sada jednu interesantnu primenu prethodne teoreme na izučavanje analitičkih funkcija.

Teorema 2.1.7 *(Edelstein [48]) Neka je $f(z)$ analitička funkcija na domenu D kompleksne $z-$ravni, i neka $f : C \mapsto C$, gde je C kompaktan i povezan podskup u D. Ako je $|f'(z)| < 1$ za svako $z \in C$, tada jednačina $f(z) = z$ ima jedinstveno rešenje u C.*

Dokaz: Kako je $|f'(z)|$ neprekidna funkcija na C, a C kompaktan podskup, sledi $|f'(z)| < \lambda < 1$, $z \in C$. Da dokažemo teoremu, dovoljno je dokazati da postoji $\varepsilon > 0$, tako da je f $(\varepsilon, \lambda)-$uniformno lokalno kontraktivna funkcija na C.

U tom cilju, posmatrajmo pokrivač skupa C koji se sastoji iz familije otvorenih kugli $\{S(z, \rho)\}$, sa centrom u $z \in C$ i poluprečnikom ρ, tako da je $f(z)$ analitička funkcija na $S(z, 2\rho)$ i $|f'(z)| < \lambda$, $z \in S(z, 2\rho)$. Ovaj pokrivač, zbog kompaktnosti skupa C, sadrži konačan podpokrivač $\{S(z_i, \rho_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Neka je $\varepsilon = \min_i \rho_i$. Bilo koje dve tačke iz C, sa rastojanjem manjim od ε, očigledno pripadaju nekoj kugli $S(z_j, 2\rho_j)$. Prema tome,

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_{z'}^{z} f'(z) dz \right| < \lambda |z - z'|, \quad z, z' \in C, \quad |z - z'| < \varepsilon,$$

i možemo sada primeniti Teoremu 2.1.6. □

U sledećoj teoremi Edelstein [49] je dao potrebne uslove da se periodična tačka preslikavanja svodi na fiksnu tačku preslikavanja.

Teorema 2.1.8 *Neka je X $\varepsilon-$lančasti metrički prostor, $f : X \mapsto X$ $\varepsilon-$kontraktivno preslikavanje koje zadovoljava (2.3). Ako je $u = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}x$, i u ima kompaktnu loptastu(kuglastu) okolinu $K(u, \rho)$ poluprečnika $\rho \geq \varepsilon$, tada je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.1.4 postoji prirodan broj k tako da je $f^k u = u$. Pretpostavimo da je $fu \neq u$, i neka je $u = x_0, x_1, \dots, x_n = fu$ $\varepsilon-$lanac. Zbog Napomene 2.1.2, nije moguće $d(u, fu) < \varepsilon$; zato je $d(u, fu) \geq \varepsilon$, a samim tim i $n \geq 2$. Pretpostaviti da je gornji lanac izabran tako da za svaki drugi $\varepsilon-$lanac $u = y_0, y_1, \dots, y_m = fu$ sledi

$$m \geq n. \tag{2.13}$$

Neka je $\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - d(x_1, x_2))$, i neka su $S_1 = S_1(u, \delta)$ i $S_2 = S_2(u, \gamma)$ otvorene kugle sa centrom u u i poluprečnicima δ i $\gamma = d(u, x_1)$.

Dokažimo da

$$x_1 \in \overline{S}_2 \backslash S_1, \tag{2.14}$$

gde je $\overline{S}_2$ zatvorenje skupa S_2.

Primetimo da je $d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)$. Ako $x_1 \in S_1$ sledi

$$d(x_0, x_2) \leq \frac{1}{2}(\varepsilon - d(x_1, x_2)) + d(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Prema tome, $u = x_0, x_2, x_3, \dots, x_n = fu$ je $\varepsilon-$lanac i $m = n - 1$, što je u kontradikciji sa uslovom (2.13).

Primetimo da je $\overline{S}_2 \setminus S_1$ zatvoren, i sledi kompaktan podskup u $K(u, \rho)$. Zato neprekidna funkcija $r(x, y)$ dostiže maksimum $R < 1$ na

$$u \times (\overline{S}_2 \setminus S_1) \subset (X \times X) \setminus \Delta.$$

Prema tome,

$$d(f^{k+1}u, f^{k+1}x_1) < R\, d(u, f^k x_1). \tag{2.15}$$

Kada se nejednakost (2.15) primeni više puta, za $l > 1$ sledi

$$\begin{aligned}
d(f^{lk}u, f^{lk}x_1) &\leq d(f^{(l-1)k+1}u, f^{(l-1)k+1}x_1) \\
&< R\, d(f^{(l-1)k}u, f^{(l-1)k}x_1) \leq \dots \\
&< R^{l-1}\, d(f^k u, f^k x_1) \\
&= R^{l-1}\, d(u, f^k x_1) \to 0, \quad l \to \infty.
\end{aligned}$$

Pokažimo da je poslednji rezultat u kontradikciji sa (2.13).

Iz pomenutog rezultata sledi da je za l dovoljno veliko $f^{lk}x_1 \in S_1$. Prema tome, za $\varepsilon-$lanac

$$u = f^{lk}x_0,\ f^{lk}x_2,\ f^{lk}x_3, \dots, f^{lk}x_n = f(u)$$

imamo $m = n - 1$, što je u kontradikciji sa (2.13). Sledi $fu = u$.

Pretpostavimo da postoji $v \in X, v \neq u$ tako da je $fv = v$. Koristeći analogno dokazivanje sa ranijim dokazom u teoremi, može se pokazati da se kao u prethodnom delu dokaza dolazi do kontradikcija sa uslovom (2.13). Sledi $u = v$. $\square$

2.2 Rakotchevi rezultati

Problem definisanja familije funkcija $F = \{\alpha(x, y)\}$ koje zadovoljavaju uslov $0 \leq \alpha < 1,\ \sup \alpha(x, y) = 1$ tako da je Banachova teorema zadovoljena kada se konstanta α zameni sa $\alpha(x, y) \in F$, predložio je profesor H. Hanani, a Rakotch je 1962.godine [111] objavio rezultate koji se odnose na pomenuti problem. U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz pomenutog rada [111].

Definicija 2.2.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Sa F_1 označimo familiju funkcija $\alpha(x, y)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:*

(1) $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y))$, tj. α zavisi samo od rastojanja između x i y.

(2) $0 \leq \alpha(d) < 1$ za svako $d > 0$.

(3) $\alpha(d)$ je monotono opadajuća funkcija od d.

Napomenimo da je preslikavanje $f : X \mapsto X$ kontraktivno ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ važi

$$d(fx, fy) < d(x, y).$$

Svako kontraktivno preslikavanje je neprekidno, a ako ima fiksnu tačku, onda je ona jedinstvena.

Teorema 2.2.1 *Neka je (X, d) metrički prostor, $f : X \mapsto X$ kontraktivno preslikavanje, $M \subset X$ i $x_0 \in M$ tako da je*

$$d(x, x_0) - d(fx, fx_0) \geq 2d(x_0, fx_0) \quad \text{za svako } x \in X \setminus M, \tag{2.16}$$

i neka je $f(M)$ podskup kompaktnog podskupa u X. Tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.

Dokaz: Pretpostavimo da je $fx_0 \neq x_0$ i neka je $x_n = f^n x_0, \ n = 1, 2, \ldots$ tj.

$$x_{n+1} = fx_n, \ n = 0, 1, \ldots \tag{2.17}$$

Na osnovu Teoreme Edelsteina (Teorema 2.1.1), dovoljno je pokazati da $x_n \in M$ za svako n.

Kako je f kontraktivno preslikavanje, niz $d(x_n, x_{n+1})$ je nerastući. Prema tome, iz $fx_0 \neq x_0$ sledi

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1), \ n = 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

Iz nejednakosti trougla imamo

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}).$$

Koristeći (2.17) i (2.18) dobijamo

$$d(x_0, x_n) - d(fx_0, fx_n) < 2d(x_0, fx_0),$$

a onda iz (2.16) sledi $x_n \in M$ za svako n. $\square$

Posledica 2.2.1 *Neka je f kontraktivno preslikavanje za koje postoji tačka $x_0 \in X$, tako da je za svako $x \in X$*

$$d(fx, fx_0) \leq \alpha(x, x_0) d(x, x_0), \tag{2.19}$$

gde je $\alpha(x,y) = \alpha(d(x,y)) \in F_1$. *Ako je* $S(x_0, r) = \{x | d(x, x_0) < r\}$, *gde je*

$$r = \frac{2d(x_0, fx_0)}{1 - \alpha(2d(x_0, fx_0))},$$

i $f(S(x_0, r))$ *podskup kompaktnog podskupa u* X, *tada preslikavanje* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Dokaz: Ako u Teoremi 2.2.1 uzmemo $M = S(x_0, r)$, na osnovu (2.19), monotonosti $\alpha(d)$ i $r \geq 2d(x_0, fx_0)$, iz $d(x, x_0) \geq r$, sledi

$$\begin{aligned} d(x, x_0) - d(fx, fx_0) &\geq d(x, x_0) - \alpha(d(x, x_0))d(x, x_0) \\ &= [1 - \alpha(d(x, x_0))]d(x, x_0) \geq [1 - \alpha(r)]r \\ &\geq [1 - \alpha(2d(x_0, fx_0))]r = 2d(x_0, fx_0), \end{aligned}$$

tj., ispunjen je uslov (2.16). □

Teorema 2.2.2 *Neka je* $f : X \mapsto X$ *kontraktivno preslikavanje, na kompletnom metričkom prostoru, i neka postoji* $M \subset X$ *i tačka* $x_0 \in M$ *tako da je:*

$$d(x, x_0) - d(fx, fx_0) \geq 2d(x_0, fx_0), \quad \textit{za svako } x \in X \setminus M, \tag{2.20}$$

$$d(fx, fy) \leq \alpha(x, y)d(x, y), \quad \textit{za svako } x, y \in M, \tag{2.21}$$

gde je

$$\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y)) \in F_1.$$

Tada preslikavanje f *ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $fx_0 \neq x_0$ i definišimo niz $x_n = f^n x_0,\ n = 1, 2, \ldots$ Kao u Teoremi 2.2.1, koristeći (2.20), dobijamo

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.22}$$

i $x_n \in M$ za svako n.

Sada ćemo pokazati da je niz $\{x_n\}$ ograničen. Iz (2.21) i definicije niza sledi

$$d(x_1, x_{n+1}) = d(fx_0, fx_n) \leq \alpha(d(x_0, x_n))d(x_0, x_n), \tag{2.23}$$

a na osnovu nejednakosti trougla imamo

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}).$$

Prema tome, iz (2.22) i (2.23) sledi

$$[1 - \alpha(d(x_0, x_n))]d(x_0, x_n) < 2d(x_0, x_1).$$

Ako je $d(x_0, x_n) \geq d_0$ za dato d_0, zbog monotonosti funkcije α, sledi

$$\alpha(d(x_0, x_n)) \leq \alpha(d_0).$$

Zato je

$$d(x_0, x_n) < \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - \alpha(d(x_0, x_n))} \leq \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - \alpha(d_0)} = C.$$

Prema tome, za $R = \max(d_0, C)$, imamo

$$d(x_0, x_n) \leq R, \ n = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

tj. $\{x_n\}$ je ograničen niz.

Neka je $p > 0$ proizvoljan prirodan broj. Iz (2.21) sledi

$$d(x_{k+1}, x_{k+p+1}) \leq \alpha(x_k, x_{k+p})d(x_k, x_{k+p}),$$

odnosno

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_p) \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(x_k, x_{k+p}).$$

Iz (2.24) sledi

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq R \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(x_k, x_{k+p}). \tag{2.25}$$

Dokažimo da je $\{x_n\}$ Cauchyev niz. Dovoljno je pokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj N, koji zavisi samo od ε(ne od p) tako da za svako $p > 0$ imamo $d(x_N, x_{N+p}) < \varepsilon$ (jer je niz $\{d(x_n, x_{n+p})\}$ nerastući).

Ako je $d(x_k, x_{k+p}) \geq \varepsilon$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, tada iz (2.21) (zbog monotonosti funkcije α) dobijamo

$$\alpha(x_k, x_{k+p}) = \alpha(d(x_k, x_{k+p})) \leq \alpha(\varepsilon),$$

a iz (2.25) sledi

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq R[\alpha(\varepsilon)]^n.$$

Kako je $\alpha(\varepsilon) < 1$ i $[\alpha(\varepsilon)]^n \to 0$, $n \to \infty$, postoji prirodan broj N, koji ne zavisi od p, tako da je $d(x_N, x_{N+p}) < \varepsilon$ za svako $p > 0$. Prema tome, $\{x_n\}$ je Cauchyev niz.

Kako je X kompletan metrički prostor, postoji $u \in X$, tako da je $\lim_n x_n = u$. Kako je funkcija f neprekidna, u je fiksna tačka preslikavanja f. $\square$

Specijalno, ako je $M = X$ dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 2.2.2 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i*

$$d(fx, fy) \leq \alpha(x, y)d(x, y), \quad \textit{za svako } x, y \in X,$$

gde $\alpha(x, y) \in F_1$. Tada preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Napomena 2.2.1 *Prethodne posledice i Teoreme 2.2.2 predstavljaju uopštenje Banachove teoreme o fiksnoj tački.*

2.3 Boyd i Wongove nelinearne kontrakcije

U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate Boyda i Wonga [22] iz 1969. godine. U pomenutom radu [22] Boyd i Wong su izučavali fiksne tačke za preslikavanja koja su uvedena u sledećoj definiciji.

Definicija 2.3.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$ koja zadovoljava uslov*

$$d(fx, fy) \leq \Psi(d(x, y)), \quad x, y \in X, \tag{2.26}$$

gde je Ψ funkcija definisana na zatvorenju slike od d, naziva se Ψ kontrakcija.

Sliku od d ćemo označavati sa P, a zatvorenje od P sa $\overline{P}$. Prema tome, $P = \{d(x, y) : x, y \in X\}$.

Rakotch [111], je dokazao da u slučaju kada je $\Psi(t) = \alpha(t)t$, gde je α opadajuće preslikavanje koje zadovoljava uslov $\alpha(t) < 1$ za $t > 0$, preslikavanje f koje zadovoljava uslov (2.26) ima jedinstvenu fiksnu tačku u. Može se dokazati da ako je $\Psi(t) = \alpha(t)t$, a α rastuća funkcija i $\alpha(t) < 1$ za $t \geq 0$, tada važi zaključak Banachove teoreme. Boyd i Wong su dokazali da je dovoljno pretpostaviti da je $\Psi(t) < t$ za $t > 0$ zajedno sa uslovom poluneprekidnosti za Ψ, a da se za metrički konveksne prostore ovaj poslednji uslov može izostavlti.

Napomenimo da je $\varphi : X \mapsto \mathbb{E}$, $E \subset \mathbb{R}$, odozgo poluneprekidna sa desne strane funkcija u $t_0 \in X$, ako iz $t_n \to t_0+$, sledi $\limsup_n \varphi(t_n) \leq \varphi(t_0)$. Funkcija $\varphi : X \mapsto \mathbb{E}$, $E \subset \mathbb{R}$, je odozgo poluneprekidna sa desne strane funkcija na X ako je φ odozgo poluneprekidna sa desne strane funkcija u $t_0 \in E$, za svako $t_0 \in E$.

Teorema 2.3.1 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, i $f : X \mapsto X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov (2.26), gde je $\Psi : \overline{P} \mapsto [0, \infty)$ odozgo poluneprekidna sa desne strane funkcija na $\overline{P}$, i zadovoljava uslov $\Psi(t) < t$ za svako $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$. Tada, funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku x_0, i $f^n x \to x_0$ za svako $x \in X$.*

Dokaz: Neka je $x \in X$ i

$$c_n = d(f^n x, f^{n-1} x), \quad n = 1, 2, \ldots .. \tag{2.27}$$

Tada je, zbog uslova (2.26), $\{c_n\}$ monotono opadajući niz, i neka je $\lim_n c_n = c \geq 0$. Dokažimo da je $c = 0$. Ako je $c > 0$ imamo

$$c_{n+1} \leq \Psi(c_n), \tag{2.28}$$

odnosno

$$c \leq \lim \sup_{t \to c+} \Psi(t) \leq \Psi(c) < c, \tag{2.29}$$

što je kontradikcija.

Dokažimo da je za svako $x \in X$, $\{f^n x\}$ Cauchyev niz. Tada je granična vrednost ovog niza i fiksna tačka funkcije f, a to je ujedno i jedinstvena fiksna tačka. Pretpostavimo da $\{f^n x\}$ nije Cauchyev niz. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i postoje nizovi prirodnih brojeva $\{m(k)\}$, $\{n(k)\}$, tako da je $m(k) > n(k) \geq k$ i

$$d_k = d(f^m x, f^n x) \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.30}$$

Možemo pretpostaviti da je

$$d(f^{m-1} x, f^n x) < \varepsilon, \tag{2.31}$$

birajući $m(k)$ tako da je to najmanji broj veći od $n(k)$ tako da je ispunjen uslov (2.30). Iz (2.27) sledi

$$d_k \leq d(f^m x, f^{m-1}x) + d(f^{m-1}x, f^n x) \leq c_m + \varepsilon \leq c_k + \varepsilon. \tag{2.32}$$

Prema tome, $d_k \to \varepsilon+$, kada $k \to \infty$. Kako je

$$\begin{aligned} d_k = d(f^m x, f^n x) &\leq d(f^m x, f^{m+1}x) + d(f^{m+1}x, f^{n+1}x) + d(f^{n+1}x, f^n x) \\ &\leq 2c_k + \Psi(d(f^m x, f^n x)) = 2c_k + \Psi(d_k), \end{aligned} \tag{2.33}$$

kad u (2.33) uzmemo $k \to \infty$, dobijamo $\varepsilon \leq \Psi(\varepsilon)$, što je kontradikcija, jer za $\varepsilon > 0$ imamo $\Psi(\varepsilon) < \varepsilon$. □

Uslov neprekidnosti preslikavanja Ψ ne može se izostaviti u Teoremi 2.3.1, što pokazuje sledeći primer.

Primer 2.3.1 *Neka je $X = \{x_n = n\sqrt{2}+2^n | n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, sa metrikom $d(x,y) = |x-y|$. X je zatvoren podskup realnih brojeva pa je kompletan. Za svako $p \in P$, $p \neq 0$, postoji jedinstveni par (x_n, x_m) takav da je $p = d(x_n, x_m)$. Pretpostavimo da za neke cele brojeve j,k,m,n za koje je $j > k$ i $m > n$ važi*

$$d(x_j, x_k) = d(x_m, x_n).$$

Tada je

$$-(m-n-j+k)\sqrt{2} = 2^j - 2^k - 2^m + 2^n. \tag{2.34}$$

Kako je levi član u (2.34) iracionalan ili nula, a desni član racionalan, sledi da su oba jednaka nuli. Dakle, za $m-n = j-k = s$ važi

$$2^{n+s} - 2^n = 2^{k+s} - 2^k, \tag{2.35}$$

što je moguće samo ako je $n = k$. Definišimo f sa $fx_n = x_{n-1}$ i definišimo Ψ na P sa

$$\Psi(p) = |x_{n-1} - x_{m-1}|, \quad \text{ako je } \ p = |x_n - x_m|. \tag{2.36}$$

Za $t \in \overline{P} \setminus P$, je $\Psi(p) = 0$.

Tada je, $\Psi(t) < t$ za $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ i

$$d(fx, fy) = \Psi(d(x,y)), \tag{2.37}$$

ali f nema fiksnu tačku.

Teorema 2.3.1 pokazuje da nije moguće dodefinisati funkciju Ψ sa skupa P na $\overline{P}$ tako da bude poluneprekidna s desne strane i važi $\Psi(t) < t$ za $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$. To se direktno vidi za tačku $\sqrt{2} \in \overline{P} \setminus P$.

Ako se uslov $\Psi(t) < t$ zameni uslovom $\Psi(t_0) = t_0$ za bar jednu vrednost t_0, tada Teorema 2.3.1 ne važi. To pokazuje sledeći primer.

Primer 2.3.2 *Neka je* $X = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, *a* $d(x, y) = |x - y|, x, y \in X$. *Neka je*

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & , x \geq 1, \\ \frac{1}{2}(x-1) & , x \leq -1. \end{cases}$$

i

$$f_2 x = -f_1 x.$$

Tada funkcije f_1 *i* f_2 *zadovoljavaju uslov (2.26) ako je*

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & , t < 2, \\ \frac{1}{2}t + 1 & , t \geq 2. \end{cases}$$

Primetimo da funkcija Ψ *zadovoljava sve uslove Teoreme 2.3.1 osim što je* $\Psi(2) = 2$. *Funkcija* f_1 *ima dve fiksne tačke* -1 *i* 1, *a funkcija* f_2 *nema fiksnih tačaka.*

Teorema 2.3.1 je uopštenje rezultata Rakotcha, tj., postoji primer prostora X i preslikavanja f, za koje su ispunjeni uslovi iz Teoreme 2.3.1, ali ne postoji funkcija α rastuća ili nerastuća koja zadovoljava uslov $\alpha(t) < 1$ za $t > 0$ tako da je

$$d(fx, fy) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y), \quad x, y \in X. \tag{2.38}$$

Primer 2.3.3 *Neka je* $X = [0, 1] \bigcup \{2, 3, 4 \ldots\}$, *a metrika* d *definisana sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & , \text{ ako } x, y \in [0, 1], \\ x + y & , \text{ ako bar jedan od } x, y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Primetimo da je (X, d) *kompletan metrički prostor, jer je* (X, d) *izometričan sa zatvorenim podskupom* Y *prostora* ℓ *svih apsolutno sumabilnih nizova. Skup* Y *se sastoji od nizova oblika* $(x, 0, 0, \ldots)$, *gde je* $x \in [0, 1]$, *i od nizova koji na* $m-$*toj koordinati imaju* m, *a sve ostale koordinate su* 0, *za* $m = 2, 3, \ldots$.

Definišimo preslikavanje $f : X \mapsto X$ na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & , x \in [0,1], \\ x - 1 & , x = 2, 3, \dots \ . \end{cases}$$

Tada, ako je $x, y \in [0,1]$, $x - y = t > 0$, imamo

$$d(fx, fy) = (x - y)(1 - \frac{1}{2}(x + y)) \leq t(1 - \frac{1}{2}t),$$

a ako je $x \in \{2, 3, 4, \dots\}$, $x > y$, tada je

$$d(fx, fy) = fx + fy < x - 1 + y = d(x, y) - 1.$$

Definišemo funkciju Ψ na sledeći način

$$\Psi(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}t^2 & , 0 \leq t \leq 1, \\ t - 1 & , 1 < t < \infty, \end{cases}$$

Funkcija Ψ je odozgo poluneprekidna sa desne strane na $[0, \infty)$, $\Psi(t) < t$ za svako $t > 0$, i ispunjen je uslov (2.26).

Kako je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d(f(n), 0)}{d(n, 0)} = 1,$$

ne postoji opadajuća funkcija α za koju je $\alpha(t) < 1$ za $t > 0$ i koja ispunjava uslov (2.38). Pored toga, kako je

$$\lim_{x \to 0} \frac{d(f(x), 0)}{d(x, 0)} = 1,$$

ne postoji ni rastuća funkcija α za koju je $\alpha(t) < 1$ za $t > 0$ i za koju je ispunjen uslov (2.38).

Sledeći rezultati odnose se na metrički konveksne prostore (videti Definiciju 2.1.3 i Lemu 2.1.1).

Lema 2.3.1 *Pretpostavimo da je (X, d) kompletan metrički prostor, i metrički konveksan, a preslikavanje $f : X \mapsto X$ zadovoljava uslov*

$$d(fx, fy) \leq M d(x, y), \quad x, y \in X, \tag{2.39}$$

za neku konstantu $M < \infty$. *Definišimo funkciju* $\phi : [0, b) \mapsto [0, b]$ *na sledeći način*

$$\phi(t) = \sup\{d(fx, fy) : x, y \in X, d(x, y) = t\}. \tag{2.40}$$

Tada,

(a) iz $s > 0$, $t > 0$ *i* $s + t < b$ *sledi*

$$\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t);$$

prema tome, ϕ *je subaditivna funkcija.*

(b) ϕ *je odozgo poluneprekidna sa desne strane funkcija na* $[0, b)$.

Dokaz: (a) Neka je $d(x, y) = s + t$ za $x, y \in X$, a $z \in X$ tako da je $d(x, z) = s$ i $d(z, y) = t$ (ovo je moguće na osnovu prethodne leme). Tada je

$$d(fx, fy) \leq d(fx, fz) + d(fz, fy) \leq \phi(s) + \phi(t). \tag{2.41}$$

Kada u (2.41)uzmemo supremum po $x, y \in X$, $d(x, y) = s + t$, dobijamo (a).

(b) Iz (a), ako je t, t_0, $t - t_0 < b$ i $t > t_0$ sledi

$$\phi(t) \leq \phi(t - t_0) + \phi(t_0) \leq M(t - t_0) + \phi(t_0)$$

Prema tome, $\limsup_{t \to t_0+} \phi(t) \leq \phi(t_0)$, i dokazan je uslov (b). $\square$

Teorema 2.3.2 *Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor i metrički konveksan, a* $f : X \mapsto X$ *preslikavanje koje zadovoljava uslov (2.26) i neka preslikavanje* $\Psi : \overline{P} \mapsto [0, \infty)$ *zadovoljava uslov* $\Psi(t) < t$ *za svako* $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$. *Tada, funkcija* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku* x_0, *i* $f^n x \to x_0$ *za svako* $x \in X$.

Dokaz: Definišimo $\phi(t)$, $t \in [0, b)$, isto kao u Lemi 2.3.1. Tada je $\phi(t) \leq \Psi(t)$ za svako $t \in [0, b)$. Ako je $P = [0, b]$, $b < \infty$, definišimo $\phi(b) = \Psi(b)$. Tada je

$$d(fx, fy) \leq \phi(d(x, y)), \tag{2.42}$$

za svako $x, y \in X$, i $\phi(t) \leq \Psi(t) < t$ za svako $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$. Na osnovu Leme 2.3.1, ϕ je odozgo poluneprekidna sa desne strane funkcija na $[0, b)$. Prema tome, možemo primeniti Teoremu 2.3.1 za funkciju f, kada umesto Ψ uzmemo ϕ. $\square$

2.4 Teorema Meir-Keelera

Meir i Keeler [103] su 1969. godine dokazali veoma interesantnu teoremu, i pokazali da zaključak Banachove teoreme važi i za širu klasu kontrakcija. U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz pomenutog rada.

Definicija 2.4.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Funkcija $f : X \mapsto X$ je slabo ravnomerno stroga kontrakcija ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \quad \Rightarrow \quad d(fx, fy) < \varepsilon. \tag{2.43}$$

Teorema 2.4.1 *(Meir i Keeler [103]) Neka je na kompletnom metričkom prostoru (X, d) dato preslikavanje $f : X \mapsto X$. Ako je uslov (2.43) zadovoljen, tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku u. Šta više, za svako $x \in X$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} f^n x = u. \tag{2.44}$$

Dokaz: Prvo primetimo, da iz uslova (2.43) sledi da je f kontraktivno preslikavanje (stroga kontrakcija), tj.,

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad d(fx, fy) < d(x, y). \tag{2.45}$$

Prema tome, f je neprekidna funkcija i ima najviše jednu fiksnu tačku.

Primetimo da ako je za svako $x \in X$, $f^n(x)$ Cauchyev niz, tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku i uslov (2.44) je zadovoljen. To sledi iz sledećeg razmatranja. Kako je prostor X kompletan, svaki Cauchyev niz $f^n(x)$ ima graničnu tačku $u(x)$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f sledi

$$f(u(x)) = f(\lim_{n\to\infty} f^n x) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1} x = u(x).$$

Prema tome, $u(x)$ je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.

Teorema će biti dokazana ako pokažemo da iz uslova (2.43) sledi da je niz iteracija $\{f^n x\} = \{x_n\}$ Cauchyev niz za svako $x \in X$. Neka je $x \in X$ i $c_n = d(x_n, x_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$ Iz (2.45) sledi (c_n) je opadajući niz. Ako je $\lim_n c_n = \varepsilon > 0$, tada implikacija (2.43) ne važi za c_{m+1}, gde je c_m izabrano tako da je $c_m < \varepsilon + \delta$. Sledi $\lim_n c_n = 0$.

Pretpostavimo da postoji niz (x_n) koji nije Cauchyev. Tada postoji $2\varepsilon > 0$ tako da za svako $m_0 \in \mathbb{N}$, postoje $n, m \in \mathbb{N}$ tako da je $m_0 < n, m$ i da je $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$. Iz (2.43) sledi da postoji $\delta > 0$, tako da je

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \quad \Rightarrow \quad d(fx, fy) < \varepsilon. \tag{2.46}$$

Implikacija (2.46) važi i kada se δ zameni sa $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$. Neka je $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $c_{m_0} < \frac{\delta'}{3}$, a neka su $m, n > m_0$, takvi da je $m < n$ i $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$. Dokažimo da postoji $j \in \{m, m+1, \ldots, n\}$ tako da je

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_j) < \varepsilon + \delta'. \tag{2.47}$$

Da dokažemo (2.47), primetimo da je $d(x_{n-1}, x_n) < \delta'/3$. Kako je $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$, i $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$, sledi

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_{n-1}). \tag{2.48}$$

Neka je k najmanji prirodan broj iz $\{m, m+1, \ldots, n\}$; (očigledno je $m < k \leq n-1$), tako da važi nejednakost

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_k). \tag{2.49}$$

Dokažimo da je $d(x_m, x_k) < \varepsilon + \delta'$. Pretpostavimo da to nije tačno. Tada je

$$\varepsilon + \delta' \leq d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_k) < d(x_m, x_{k-1}) + \frac{\delta'}{3},$$

tj.,

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_{k-1}). \tag{2.50}$$

Ovo je u kontradikciji sa uslovom za minimalnost broja k u nejednakosti (2.49). Prema tome tačna je nejednakost (2.47).

Sada, iz

$$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_k),$$

(2.46) i (2.47) sledi

$$d(x_m, x_j) \leq c_m + \varepsilon + c_k < \frac{\delta'}{3} + \varepsilon + \frac{\delta'}{3}.$$

Ovo je u kontradikciji sa (2.47). Prema tome, $\{x_n\}$ je Cauchyev niz. $\square$

Poznato je da je Meir-Keelerova teorema uopštenje Banachovog kontrakcionog principa [12] i Edelsteinove teoreme o fiksnoj tački [49].

Teorema 2.4.2 *(Banach [12]) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ kontrakcija, tj.,postoji $q \in [0, 1)$, tako da je*

$$d(fx, fy) \leq q \cdot d(x, y), \qquad \text{za svako } x, y \in X. \tag{2.51}$$

Tada preslikavanje f ima samo jednu fiksnu tačku.

Dokaz: Neka je $\epsilon > 0$ i $\delta = (1/q - 1)\epsilon$. Tada, ako je $d(x, y) < \epsilon + \delta$ i $x \neq y$, sledi $d(fx, fy) \leq qd(x, y) < q\epsilon + q\delta = \epsilon$. Prema tome, funkcija f zadovoljava uslov (2.43), i dokaz sledi iz Teoreme 2.4.1. □

Teorema 2.4.3 *(Edelstein [49]) Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka $f : X \mapsto X$. Pretpostavimo da je*

$$d(fx, fy) < d(x, y)$$

za svako x, $y \in X$ za koje je $x \neq y$. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz:(Suzuki) Pretpostavimo da funkcija f ne zadovoljava uslov (2.43). Tada postoji $\epsilon > 0$, i nizovi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ iz X tako da je

$$d(x_n, y_n) < \epsilon + 1/n \qquad \text{i} \qquad d(fx_n, fy_n) \geq \epsilon. \tag{2.52}$$

Kako je X kompaktan skup, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ koji konvergira ka $x_0 \in X$, i podniz $\{y_{m_k}\}$ niza $\{y_n\}$ koji konvergira ka $y_0 \in X$. Kako je f neprekidna funkcija, sledi

$$d(x_0, y_0) \leq \epsilon \leq d(fx_0, fy_0) < d(x_0, y_0).$$

Došli smo do kontradikcije. Prema tome, funkcija f zadovoljava uslov (2.43), i dokaz sledi iz Teoreme 2.4.1. □

Napomena 2.4.1 *Meir i Keeler[103] su pokazali da prethodna teorema sledi iz Teoreme 2.4.1, ako se uoči da na kompaktnom prostoru, svako kontraktivno preslikavanje $f : X \mapsto X$ je slabo uniformno strogo. Posmatrajmo izraz*

$$\inf_{\varepsilon \leq d(x,y)} [d(x, y) - d(fx, fy)] = \delta(\varepsilon).$$

Kako je prostor X kompaktan, ovaj infimum se dostiže za neki par tačaka $(a, b) \in X \times X$, za koje je $d(a, b) \geq \varepsilon$. Kako je f kontraktivno preslikavanje, sledi $\delta(\varepsilon) > 0$.

Napomena 2.4.2 *(Još jedan dokaz Teoreme 2.4.3). Funkcija* $g : X \mapsto R$*, definisana sa* $g(x) = d(x, f(x)), x \in X$*, je neprekidna na kompaktnom skupu, i dostiže infimum, recimo u tački* $x_0 \in X$*. Ako je* $x_0 \neq f(x_0)$*, tada je*

$$g(fx_0) = d(fx_0, f(fx_0)) < d(x_0, fx_0) = g(x_0),$$

što je kontradikcija.

Rakotch [111], Boyd i Wong [22] su pretpostavili, da uz ostale uslove, važe nejednakosti

$$d(fx, fy) \leq \psi(d(x, y)) \quad \text{i} \quad \psi(t) < t, t \neq 0. \tag{2.53}$$

Sledeći primer pokazuje da uslov (2.53) nije ispunjen, a da su uslovi iz Teoreme 2.4.1 ispunjeni.

Primer 2.4.1 *Neka je dat prostor* $X = [0, 1] \cup \{3, 4, 6, 7, \ldots, 3n, 3n + 1, \ldots\}$*, sa Euclideanovom metrikom, i preslikavanje* $f(x)$ *definisano na sledeći način*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , x = 3n, \\ 1 - \frac{1}{n+2} & , x = 3n + 1. \end{cases}$$

Sada funkcija f *zadovoljava uslov (2.43), a iz*

$$d(fx, fy) \leq \psi(d(x, y)) \quad x, y \in X, \tag{2.54}$$

sledi $\psi(1) = 1$*.*

2.5 Teoreme Kannana, Chatterjea i Zamfirescua

Sledeća teorema je rezultat Kannana [89] iz 1968. godine.

Teorema 2.5.1 *Ako je* (X, d) *kompletan metrički prostor,* $0 \leq q < \frac{1}{2}$ *i* $f : X \mapsto X$*, preslikavanje tako da je*

$$d(fx, fy) \leq q[d(x, fx) + d(y, fy)] \tag{2.55}$$

za svako $x, y \in X$*, onda* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku, tj. postoji samo jedno* $u \in X$ *tako da je* $fu = u$*.*

Dokaz: (Joseph i Kwack [80]) Neka je

$$c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}. \tag{2.56}$$

Tada je $c \geq 0$. Ako je $c > 0$, tada iz $(1-q)/q \cdot c > c$, sledi postoji $x \in X$ tako da je $d(x, f(x)) < (1-q)/q \cdot c$. Sada imamo

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \frac{q}{1-q} d(x, f(x)) < c, \tag{2.57}$$

što je kontradikcija. Prema tome, $c = 0$. Sledi, postoji niz $\{x_n\}$ u X tako da je $\lim_n d(x_n, f(x_n)) = 0$. Kako je

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, f(x_m)) + d(f(x_m), f(x_n)) + d(x_n, f(x_n)) \\ &\leq (1+q)[d(x_m, f(x_m)) + d(x_n, f(x_n))], \end{aligned}$$

sledi x_n je Cauchyev niz. Prema tome, postoji $p \in X$ tako da je $\lim_n x_n = p$. Sledi $\lim_n f(x_n) = p$. Dokažimo da je $f(p) = p$. Iz

$$\begin{aligned} d(p, f(p)) &\leq d(p, f(x_n)) + d(f(x_n), f(p)) \\ &\leq d(p, f(x_n)) + q[d(x_n, f(x_n)) + d(p, f(p))], \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$, sledi

$$d(p, f(p)) \leq q d(p, f(p)),$$

odnosno $p = f(p)$. Iz uslova (2.55) sledi preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku. □

Banachov uslov (1.1) i Kannanov (2.55) uslov su nezavisni. Uslov (1.1) povlači neprekidnost preslikavanja f, dok to nije slučaj sa uslovom (2.55). To sledi iz sledećih primera.

Primer 2.5.1 *Neka je $X = [0, 1]$ i $f(x)$ definisano na sledeći način:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0, 1/2), \\ \frac{x}{5}, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Preslikavanje f je prekidno u tački $x = 1/2$, zbog toga uslov (1.1) nije zadovoljen, ali je uslov (2.55) zadovoljen za $q = 4/9$.

Primer 2.5.2 *Neka je $X = [0, 1]$, $f(x) = x/3$ za $x \in [0, 1]$. Očigledno, uslov (1.1) je ispunjen, ali uslov (2.55) nije(možemo uzeti $x = 1/3$, $y = 0$).*

Sledeću teoremu dokazao je Chatterjea [28] 1972. godine.

Teorema 2.5.2 *Ako je* (X, d) *kompletan metrički prostor,* $0 \leq q < \frac{1}{2}$, *i* $f : X \mapsto X$ *preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$d(fx, fy) \leq q[d(x, fy) + d(y, fx)]$$

za svako $x, y \in X$, *tada preslikavanje* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Dokaz: (Fisher [53]) Neka je $x \in X$. Tada je

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^{n+1} x) &\leq q[d(f^{n-1} x, f^{n+1} x) + d(f^n x, f^n x)] \\ &= q d(f^{n-1} x, f^{n+1} x) \\ &\leq q[d(f^{n-1} x, f^n x) + d(f^n x, f^{n+1} x)]. \end{aligned}$$

Prema tome

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^{n+1} x) &\leq \frac{q}{1-q} d(f^{n-1} x, f^n x) \\ &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 d(f^{n-2} x, f^{n-1} x) \\ &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n d(x, fx). \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^{n+r} x) &\leq d(f^n x, f^{n+1} x) + \cdots + d(f^{n+r-1} x, f^{n+r} x) \\ &\leq \left[\left(\frac{q}{1-q}\right)^n + \cdots + \left(\frac{q}{1-q}\right)^{n+r-1}\right] d(x, fx) \\ &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n \frac{1-q}{1-2q} d(x, fx). \end{aligned}$$

Kako je $q(1-q)^{-1} < 1$, sledi $\{f^n x\}$ je Cauchyev niz u X. Zato što je X kompletan metrički prostor, postoji $z \in X$ tako da je $\lim_n f^n x = z$.

Sada je

$$\begin{aligned} d(z, fz) &\leq d(z, f^n x) + d(f^n x, fz) \\ &\leq d(z, f^n x) + q[d(f^{n-1} x, fz) \ + d(f^n x, z)]. \end{aligned}$$

Kad $n \to \infty$, sledi
$$d(z, fz) \leq qd(z, fz),$$
a kako je $q < 1/2$, imamo
$$fz = z.$$
Prema tome, z je fiksna tačka preslikavanja f.

Pretpostavimo sada da funkcija f ima još jednu fiksnu tačku $z' \in X$. Tada je

$$\begin{aligned} d(z, z') &= d(fz, fz') \\ &\leq q[d(z, fz') + d(z', fz)] \\ &= 2qd(z, z'). \end{aligned}$$

Kako je $q < 1/2$, sledi $z = z'$, tj., fiksna tačka preslikavanja f je jedinstvena. □

Zamfirescu [150] je 1972. godine objedinio Banachovu, Kannanovu i Chatterjeovu teoremu.

Teorema 2.5.3 *(Zamfirescu [150]) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ preslikavanje za koje postoje realni brojevi $0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$, tako da je za svako $x, y \in X$ bar jedan od sledećih uslova zadovoljen:*

$$\begin{aligned} &(z_1) \qquad d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y); \\ &(z_2) \qquad d(fx, fy) \leq \beta[d(x, fx) + d(y, fy)]; \\ &(z_3) \qquad d(fx, fy) \leq \gamma[d(x, fy) + d(y, fx)]. \end{aligned}$$

Tada preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz: Neka je $x, y \in X$. Tada je bar jedan od uslova (z_1), (z_2) ili (z_3) zadovoljen. Ako je (z_2) zadovoljeno, tada imamo

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq \beta[d(x, fx) + d(y, fy)] \\ &\leq \beta\{d(x, fx) + [d(y, x) + d(x, fx) + d(fx, fy)]\}. \end{aligned}$$

Odavde je
$$(1 - \beta)d(fx, fy) \leq 2\,\beta d(x, fx) + \beta d(x, y),$$
tj.
$$d(fx, fy) \leq \frac{2\beta}{1 - \beta}\, d(x, fx) + \frac{\beta}{1 - \beta}\, d(x, y).$$

Na sličan način, ako je zadovoljeno (z_3), dobijamo sledeću ocenu

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\le \gamma[d(x, fy) + d(y, fx)] \le \\ &\le \gamma[d(x, fx) + d(fx, fy) + d(y, x) + d(x, fx)] \le \\ &\le \gamma[2d(x, fx) + d(fx, fy) + d(x, y)]. \end{aligned}$$

Odavde je

$$d(fx, fy) \le \frac{2\gamma}{1-\gamma}\, d(x, fx) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\, d(x, y).$$

Neka je

$$\lambda = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}.$$

Tada je $0 \le \lambda < 1$, i za svako $x, y \in X$, za koje je zadovoljeno (z_2) ili (z_3), važi

$$d(fx, fy) \le 2\lambda \cdot d(x, fx) + \lambda \cdot d(x, y). \tag{2.58}$$

Na sličan način, može se pokazati da ako je ispunjen uslov (z_2) ili (z_3) važi

$$d(fx, fy) \le 2\lambda \cdot d(x, fy) + \lambda \cdot d(x, y). \tag{2.59}$$

Očigledno, iz uslova (z_1), sledi (2.58) i (2.59).

Iz (2.58) sledi da f može imati najviše jednu fiksnu tačku. Dokažimo da f ima fiksnu tačku. Neka je $x_0 \in X$ i $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_n = f^n x_0,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Picard-ove iteracije za f.

Ako su $x := x_n,\ y := x_{n-1}$ dve sukcesivne aproksimacije, iz (2.59) dobijamo

$$d(x_{n+1}, x_n) \le \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1}).$$

Sledi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Cauchyev niz, a samim tim i konvergentan. Neka je $u \in X$ njegova granica. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

Iz nejednakosti trougla i (2.58) sledi

$$\begin{aligned} d(u, fu) &\le d(u, x_{n+1}) + d(fx_n, fu) \\ &\le d(u, x_{n+1}) + \lambda \cdot d(u, x_n) + 2\lambda d(x_n, fx_n), \end{aligned}$$

a kad uzmemo da $n \to \infty$, dobijamo $d(u, fu) = 0$, odnosno $fu = u$. $\square$

Napomena 2.5.1 *Ukoliko funkcija f zadovoljava uslov iz Teoreme 2.5.2 pisa ćemo $f \in (Z)$, a specijalno ako funkcija f zadovoljava neki od uslova $(z_i), i = 1, 2, 3$, iz te teoreme, pisa ćemo $f \in (Z; z_i), i = 1, 2, 3$.*

Posmatrajmo uslov (Z'): Postoje nenegativne funkcije a, b, c koje zadovoljavaju uslov

$$\sup_{x,y \in X} (a(x, y) + 2b(x, y) + 2c(x, y)) \leq \lambda < 1,$$

tako da je za svako $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d(fx, fy) \leq a(x, y)d(x, y) &+ b(x, y)(d(x, fx) + d(y, fy)) \\ &+ c(x, y)(d(x, fy) + d(y, fx)), \end{aligned}$$

i uslov (Z''): Postoji konstanta $h, 0 \leq h < 1$, tako da je za svako $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d(fx, fy) \leq h \max\Big\{ d(x, y),\ &\frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}, \\ &\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Može se pokazati ([122]) da su uslovi $(Z), (Z')$ i (Z'') ekvivalentni.

$(Z) \Rightarrow (Z')$. Ukoliko f i $x, y \in X$ zadovoljavaju uslov $(Z; z_1)$, definišimo $a(x, y) = \alpha, b = c = 0$. Ako za $x, y \in X$ za koje f zadovoljava uslov $(Z; z_2)$, definišimo $b(x, y) = \beta, a = c = 0$, i slično u slučaju $(Z; z_3)$ definišimo $c(x, y) = \gamma, a = b = 0$.

$(Z') \Rightarrow (Z'')$. Neka je

$$\begin{aligned} M(x, y) = \max\Big\{ d(x, y),\ &\frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}, \\ &\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Neka $f \in (Z')$. Tada je

$$d(fx, fy) \leq [a(x, y) + 2b(x, y) + 2c(x, y)]M(x, y) \leq \lambda M(x, y),$$

i $f \in (Z'')$.

$(Z'') \Rightarrow (Z)$. Za svako $x, y \in X$ za koje je $M(x, y) = d(x, y)$, f zadovoljava $(Z; z_1)$ za $\alpha = h$. Ako je $M(x, y) = [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]/2$, tada f zadovoljava uslov $(Z; z_2)$ za $\beta = h/2$, i f zadovoljava $(Z; z_3)$ sa $\gamma = h/2$ ukoliko je $M(x, y) = [d(x, f(y)) + d(y, f(x))]/2$. □

2.6 Ćirićeva generalizovana-kontrakcija

Ćirić [35] je 1971. godine definisao i izučavao generalizovane kontrakcije, funkcije koje uopštavaju Banachovu kontrakciju (1.1) i Kannanovu kontrakciju (2.55).

Definicija 2.6.1 *(Ćirić [35]) Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$ je $\lambda-$generalizovana kontrakcija ako za svako $x, y \in X$ postoje nenegativni brojevi $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$ i $t(x, y)$, tako da je*

$$\sup_{x,y\in X} \{q(x, y) + r(x, y) + s(x, y) + 2t(x, y)\} = \lambda < 1,$$

i da za svako $x, y \in X$ važi

$$d(fx, fy) \leq q(x, y)d(x, y) + r(x, y)d(x, fx) + s(x, y)d(y, fy) + t(x, y)(d(x, fy) + d(y, fx)). \quad (2.62)$$

Primetimo da je funkcija $f : (X, d) \mapsto (X, d)$ generalizovana kontrakcija ako i samo ako postoji konstanta $h, 0 \leq h < 1$, tako da je za svako $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq h \max\left\{d(x, y),\ d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2}\right\}. \quad (2.63)$$

U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz [35].

Sledeća dva primera pokazuju da je uslov (2.62) zaista generalizacija uslova (1.1) i (2.55).

Primer 2.6.1 *Neka je $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$ i*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} & , 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x}{10} & , 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Preslikavanje f ne zadovoljava uslov (1.1) na celom X. Ako uzmemo $x = \frac{999}{1000}$ i $y = \frac{1001}{1000}$, dobijamo

$$d(fx, fy) = \frac{981}{90000} > 5 \cdot \frac{180}{90000} = 5d(x, y).$$

Međutim, preslikavanje f zadovoljava uslov (2.62) za $q(x, y) \equiv \frac{1}{10}$, $r(x, y) = s(x, y) \equiv \frac{1}{4}$ i $t(x, y) \equiv \frac{1}{6}$ za svako $x, y \in X$.

Primer 2.6.2 *Neka je* $X = [0, 10] \subset \mathbb{R}$ *i* $fx = \frac{3}{4}$ *za svako* $x \in X$. *Za* $x = 0$ *i* $y = 8$, *preslikavanje* f *za* $q < 3$ *ne zadovoljava uslov (2.55). Međutim, uslov (2.62) je zadovoljen na celom prostoru* X *za* $q(x, y) \equiv \frac{3}{4}$, $r(x, y) = s(x, y) = t(x, y) \equiv \frac{1}{20}$.

Definicija 2.6.2 *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $f : X \mapsto X$ *i* $x \in X$. *Skup*

$$O(x; f) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

naziva se orbita elementa x *u odnosu na* f. *Metrički prostor* (X, d) *je f-orbitalno kompletan ako svaki Cauchyev niz oblika* $\{f^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $x \in X$, *konvergira u* X.

Primetimo da je svaki kompletan metrički prostor i $f-$orbitalno kompletan, a obrnuto, u opštem slučaju nije tačno.

Sledeća teorema se odnosi na $f-$orbitalno kompletne metričke prostore.

Teorema 2.6.1 *(Ćirić [35]) Neka je* $f : X \mapsto X$ $\lambda-$*generalizovana kontrakcija na* $f-$*orbitalno kompletnom metričkom prostoru* X. *Tada,*

(i) *preslikavanje* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku* $u \in X$,

(ii) $f^n x \to u$ *za svako* $x \in X$ *i*

(iii) $d(f^n x, u) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x, fx)$.

Dokaz: Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Formirajmo niz

$$x_0 = x,\ x_1 = fx_0, \ldots, x_n = fx_{n-1} = f^n x_0, \ldots \tag{2.64}$$

Kako je f $\lambda-$generalizovana kontrakcija, iz (2.62) sledi

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) = d(fx_{n-1}, fx_n) &\leq q(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) \\ &+ r(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, fx_{n-1}) + s(x_{n-1}, x_n)d(x_n, fx_n) \\ &+ t(x_{n-1}, x_n)(d(x_{n-1}, fx_n) + d(x_n, fx_{n-1})) \\ &= q(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) \\ &+ s(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + t(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Koristeći nejednakosti trougla imamo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) \le\ & (q(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n) \\ & + s(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \\ & + t(x_{n-1}, x_n)(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \frac{q(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n) + t(x_{n-1}, x_n)}{1 - s(x_{n-1}, x_n) - t(x_{n-1}, x_n)}\, d(x_{n-1}, x_n). \qquad (2.65)$$

Kako je $\lambda < 1$, iz

$$q(x, y) + r(x, y) + t(x, y) + \lambda\, s(x, y) + \lambda\, t(x, y) \le \lambda$$

sledi

$$\frac{q(x, y) + r(x, y) + t(x, y)}{1 - s(x, y) - t(x, y)} \le \lambda$$

za svako $x, y \in X$. Prema tome, iz (2.65) sledi

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \lambda\, d(x_{n-1}, x_n), \qquad (2.66)$$

što pokazuje da je generalizovana kontrakcija ustvari kontrakcija za određeni par tačaka. Ponavljajući ovaj postupak $n-$puta, imamo

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \lambda\, d(x_{n-1}, x_n) \le \ldots \le \lambda^n\, d(x, fx).$$

Sada, za svako $p \in \mathbb{N}$ imamo

$$d(x_n, x_{n+p}) \le \sum_{i=1}^{p} d(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \le \sum_{i=1}^{p} \lambda^{n+i-1}\, d(x, fx),$$

odnosno,

$$d(x_n, x_{n+p}) \le \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \cdot d(x, fx). \qquad (2.67)$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, iz (2.67) sledi niz (2.64) je Cauchyev. Kako je prostor X $f-$orbitalno kompletan, postoji $u \in X$ tako da je

$$u = \lim_{n\to\infty} f^n x = \lim_{n\to\infty} x_n. \qquad (2.68)$$

Pokažimo da je u fiksna tačka preslikavanja f, tj.,

$$fu = \lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u. \tag{2.69}$$

Kako je f generalizovana kontrakcija, na osnovu (2.62) i nejednakosti trougla sledi

$$\begin{aligned}
d(fu, fx_n) &\leq q(u, x_n)d(u, x_n) + r(u, x_n)(d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, fu)) \\
&\quad + s(u, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + t(u, x_n)(d(u, x_{n+1}) + d(fu, x_n)) \\
&\leq \lambda d(u, x_n) + (r(u, x_n) + t(u, x_n))d(u, x_{n+1}) \\
&\quad + r(u, x_n)d(fx_n, fu) + s(u, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \\
&\quad + t(u, x_n)(d(fu, fx_n) + d(fx_n, x_n)) \\
&\leq d(u, x_n) + \lambda d(u, x_{n+1}) \\
&\quad + (r(u, x_n) + t(u, x_n))d(fu, fx_n) + \lambda d(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq \lambda(d(u, x_n) + d(u, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})) + \lambda d(fu, fx_n).
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(fu, fx_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \Big[d(u, x_n) + d(u, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})\Big]. \tag{2.70}$$

Iz (2.68) i (2.70) sledi (2.69), tj., u je fiksna tačka preslikavanja f. Pokažimo da preslikavanje f ima samo jednu fiksnu tačku. Neka je $v \in X$ i $fv = v$. Iz (2.62) sledi

$$d(u, v) = d(fu, fv) \leq q(u, v) \cdot d(u, v)$$

tj. $(1 - q(u, v)) \cdot d(u, v) \leq 0$. Prema tome, $d(u, v) = 0$, odnosno $u = v$. Ovim je dokazana osobina (i).

Kako je x proizvoljna tačka, iz (2.68) sledi (ii). Kada $p \to \infty$, iz (2.67) sledi (iii). $\Box$

Napomena 2.6.1 *Primetimo da se iz Teoreme 2.6.1 mogu dobiti brojne posledice. Na primer, ako za svako* $x, y \in X$, f *zadovoljava uslov*

$$d(fx, fy) \leq \alpha\,[d(x, fy) + d(y, fx)],\ 0 < 2\alpha < 1$$

i ako je X $f-$*orbitalno kompletan metrički prostor, tada, uzimajući* $2t = \lambda$, *sledi isto tvrđenje kao u Teoremi 2.6.1.*

Teorema 2.6.2 *Neka je na $f-$orbitalno kompletnom metričkom prostoru X dato preslikavanje $f : X \mapsto X$. Ako postoji $k \in \mathbb{N}$, tako da je $f^k = ff^{k-1}$ $\lambda-$generalizovana kontrakcija, tada*

(i') *preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$,*

(ii') *$f^n x \to u$ za svako $x \in X$, i*

(iii') *$d(f^n x, u) \leq (\lambda')^n \rho(x, fx)$,*

gde je $\lambda' = \lambda^{\frac{1}{k}}$ i $\rho(x, fx) = \max\{\lambda^{-1} d(f^r x, f^{r+k} x) : r = 0, 1, \ldots, k-1\}$.

Dokaz: Iz Teoreme 2.6.1 sledi (i') i (ii'). Pokažimo (iii'). Neka je $n \in \mathbb{N}$. Kako je f^k generalizovana kontrakcija i $n = mk + r,\ m = \left[\frac{n}{k}\right],\ 0 \leq r < k$, iz (iii) sledi

$$\begin{aligned} d(f^n x, u) = d(f^{mk} f^r x, u) &\leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \cdot d(f^r x, f^k f^r x) \\ &= (\lambda^{\frac{1}{k}})^{mk+r-r} \cdot d(f^r x, f^{k+r} x) \\ &\leq (\lambda^{\frac{1}{k}})^{mk+r-k} \cdot d(f^r x, f^{r+k} x) \\ &= (\lambda^{\frac{1}{k}})^n \cdot \lambda^{-1} d(f^r x, f^{r+k} x). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(f^n x, u) \leq (\lambda^{\frac{1}{k}})^n \cdot \max\{\lambda^{-1} d(f^r x, f^{r+k} x) :\ r = 0, 1, \ldots, k-1\}. \quad \square$$

Sledeća teorema predstavlja lokalnu verziju Teoreme 2.6.1.

Teorema 2.6.3 *Neka je X metrički prostor, $x_0 \in X$ i*

$$B = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

Ako je preslikavanje $f : B \mapsto X$ $\lambda-$generalizovana kontrakcija na B, X $f-$orbitalno kompletan i

$$d(x_0, fx_0) \leq (1-\lambda) \cdot r, \tag{2.71}$$

tada

(i") *f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in B$,*

(ii") *u je granična vrednost niza*

$$x_0,\, x_1 = fx_0,\, \ldots, x_n = f^n x_0, \ldots$$

(iii") $d(f^n x_0, u) \leq \lambda^n \cdot r$

gde je $\lambda = \sup_{x,y\in B}[q(x,y) + r(x,y) + 2t(x,y)]$.

Dokaz: Kako je $\lambda < 1$, iz (2.71) sledi $x_1 \in B$. Koristeći metod matematičke indukcije dokazaćemo da je $x_n \in B$, $n = 1, 2, \ldots$.

Pretpostavimo da $x_0, x_1, \ldots, x_m \in B$. Možemo primeniti (2.66) za $n = 1, 2, \ldots, m$ i (2.67) za $n = 0$ i $p = m + 1$. Tada, na osnovu (2.67) imamo

$$d(x_0, x_{m+1}) \leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot d(x_0, fx_0),$$

a na osnovu (2.71)

$$d(x_0, x_{m+1}) \leq r,$$

tj. $x_{m+1} \in B$. Prema tome, $f^n x_0 \in B$, $n = 1, 2, \ldots$. Koristeći isti postupak kao u dokazu Teoreme 2.6.1, pokazuje se da je $\{x_n\}$ Cauchyev niz i da konvergira ka tački $u \in X$, koja je fiksna tačka preslikavanja f. Kako je B zatvoren podskup u X, sledi $u \in B$. □

2.7 Reichova teorema

Reich [117] je 1971. godine dokazao sledeću teoremu, i tako objedinio i uopštio Banachovu i Kannanovu teoremu. (Primetimo da ako je $a = b = 0$ dobijamo Banachovu teoremu, Teoremu 1.2.1, a ako je $a = b$ i $c = 0$ dobijamo Kannanovu teoremu, Teoremu 2.5.1).

Teorema 2.7.1 *(Reich [117]) Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor i* $f : X \mapsto X$ *preslikavanje za koje postoje nenegativni brojevi* a, b *i* c*, tako da je* $a + b + c < 1$ *i da je za svako* $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y). \tag{2.72}$$

Tada preslikavanje f *ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Dokaz: Neka je $x \in X$ i posmatrajmo niz $\{f^n(x)\}$. Kad uzmemo $x = f^n(x)$, a $y = f^{n-1}(x)$ u (2.72), za $n \geq 1$ imamo

$$d(f(f^n(x)), f(f^{n-1}(x))) \leq ad(f^n(x), f(f^n(x))) + bd(f^{n-1}(x), f(f^{n-1}(x))) \\ +cd(f^n(x), f^{n-1}(x)).$$

Prema tome,

$$d(f^{n+1}(x)), f^n(x))) \leq pd(f^n(x), f^{n-1}(x)),$$

gde je $0 \leq p = (b+c)/(1-a) < 1$. Sledi

$$d(f^{n+1}(x)), f^n(x))) \leq p^n d(x, f(x)),$$

te je za svako $m > n$,

$$d(f^m(x)), f^n(x))) \leq \frac{p^n}{1-p} \cdot d(x, f(x)).$$

Prema tome, $\{f^n(x)\}$ je Cauchyev niz, i postoji $z \in X$, tako da je $\lim_n f^n(x) = z$. Dokažimo da je $f(z) = z$. Za to je dovoljno dokazati $\lim_n f^{n+1}(x) = f(z)$.

Kad uzmemo $x = f^n(x)$, a $y = z$ u (2.72), za $n \geq 1$ imamo

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(x)), f(z)) &\leq ad(f^n(x), f^{n+1}(x)) + bd(z, f(z)) + cd(f^n(x), z) \\ &\leq ad(f^n(x), f^{n+1}(x)) + bd(f^{n+1}(x), f(z)) + bd(f^{n+1}(x), z) + cd(f^n(x), z) \\ &\leq ap^n d(x, f(x)) + bd(f^{n+1}(x), f(z)) + bd(f^{n+1}(x), z) + cd(f^n(x), z). \end{aligned}$$

Prema tome, kad $n \to \infty$,

$$d(f^{n+1}(x)), f(z)) \leq \frac{ap^n d(x, f(x)) + +bd(f^{n+1}(x), z) + cd(f^n(x), z)}{1-b} \to 0.$$

Dokažimo da preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku. Ako pretpostavimo da su $x, y \in X,\ x \neq y$, fiksne tačke preslikavanja f, tada je

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y) = cd(x, y),$$

a odatle sledi $x = y$. $\square$

Primer 2.7.1 *Neka je* $X = [0,1]$ *sa uobičajenom metrikom, i* $f : X \mapsto X$ *preslikavanje definisano sa* $f(x) = x/3$*, za* $0 \leq x < 1$*, i* $f(1) = 1/6$*. Preslikavanje* f *ne zadovoljava Banachov uslov, jer je prekidno, a ne zadovoljava ni Kannanov uslov, jer je*

$$d(f(0), f(\frac{1}{3})) = \frac{1}{2}\left[(d(0, f(0)) + d(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))\right].$$

Međutim, preslikavanje f *zadovoljava uslov (2.72), na primer za* $a = 1/6, b = 1/9, c = 1/3$.

Posledica 2.7.1 *(Reich [117]) Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor i* $f_n : X \mapsto X$*,* $n = 1, 2, \ldots$*, niz preslikavanja koja zadovoljavaju uslov (2.72) sa istim konstantama* a, b, c *i sa fiksnim tačkama* $u_n \in X$*. Pretpostavimo da je preslikavanje* $f : X \mapsto X$ *definisano sa* $f(x) = \lim_n f_n(x)$*,*$x \in X$*. Tada preslikavanje* f *ima jedinstvernu fuiksnu tačku* $u \in X$ *i* $\lim u_n = u$*.*

Dokaz: Kako je metrika d neprekidna funkcija, sledi funkcija f zadovoljava uslov (2.73), i prema tome ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$. Primetimo da je

$$\begin{aligned} d(u_n, u) &= d(f_n(u_n), f(u)) \leq d(f_n(u_n), f_n(u)) + d(f_n(u), f(u)) \\ &\leq ad(u_n, f_n(u_n)) + bd(u, f_n(u)) + cd(u_n, u) + d(f_n(u), f(u)). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(u_n, u) \leq \frac{(b+1)d(f_n(u), f(u))}{1-c} \to 0, \quad n \to \infty. \quad \square$$

2.8 Rezultati Hardy i Rogersa

Hardy i Rogers [67] su 1973. godine uopštili rezultate Reicha [117]. U ovoj sekciji izložićemo pojedine rezultate iz pomenutog rada [67], a glavni rezultat je sledeća teorema.

Teorema 2.8.1 *(Hardy i Rogers [67]) Neka je* (X, d) *metrički prostor i* $f : X \mapsto X$ *preslikavanje tako da je za svako* $x, y \in X$*,*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \leq\ & ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) \\ & + cd(x, f(y)) + ed(y, f(x)) + fd(x, y), \end{aligned} \tag{2.73}$$

gde su a, b, c, e *i* f*, nenegativni brojevi, i neka je* $\alpha = a + b + c + e + f$*. Tada,*

(a) *Ako je (X, d) kompletan metrički prostor i $\alpha < 1$, preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

(b) *Ako je uslov (2.73) zamenjen uslovom*

Iz $x \neq y$ sledi

$$d(f(x), f(y)) < ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, f(y)) + ed(y, f(x)) + fd(x, y), \quad (2.74)$$

(i u ovom slučaju pretpostavljamo da je (X, d) kompaktan metrički prostor, f neprekidno preslikavanje) i $\alpha = 1$, tada preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Pre nego dokažemo navedenu teoremu, dokazaćemo sledeću lemu.

Lema 2.8.1 *Pretpostavimo da je uslov (2.73) ispunjen na (X, d). Tada, ako je $\alpha < 1$, postoji $\beta < 1$, tako da je*

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \beta d(x, f(x)). \quad (2.75)$$

Ako je ispunjen uslov (2.74) za $\alpha = 1$, tada iz

$$x \neq f(x) \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f^2(x)) \leq \beta d(x, f(x)). \quad (2.76)$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $\alpha < 1$. Neka je $y = f(x)$. Iz uslova (2.73) imamo

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \frac{a+f}{1-b} \cdot d(x, f(x)) + \frac{c}{1-b} \cdot d(x, f^2(x)). \quad (2.77)$$

Kako je $d(f(x), f^2(x)) \geq d(f^2(x), x) - d(f(x), x)$, iz (2.77) imamo

$$d(f^2(x), x) - d(f(x), x) \leq \frac{a+f}{1-b} \cdot d(x, f(x)) + \frac{c}{1-b} \cdot d(x, f^2(x)), \quad (2.78)$$

odnosno

$$d(f^2(x), x) \leq \frac{1+a+f-b}{1-b-c} \cdot d(x, f(x)). \quad (2.79)$$

Zamenom (2.79) u (2.77) imamo

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \frac{a+c+f}{1-b-c} \cdot d(x, f(x)). \quad (2.80)$$

Kako je metrika d simetrična funkcija po svojim promenljivim argumentima, možemo zameniti a sa b i c sa e u (2.80), i dobijamo

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \frac{b+e+f}{1-a-e} \cdot d(x, f(x)). \tag{2.81}$$

Sada, možemo uzeti

$$\beta = \min\left\{\frac{a+c+f}{1-b-c}, \frac{b+e+f}{1-a-e}\right\}, \tag{2.82}$$

i onda β zadovoljava uslov (2.75). Ostatak dokaza je sličan, samo ako se ima u vidu da se opštost dokaza ne umanjuje ako se pretpostavi $a+e<1$ i $b+c<1$. $\square$

Dokaz Teoreme 2.8.1: Da dokažemo (a), primetimo da iz (2.75) sledi za svako $m > n$,

$$\begin{aligned} d(f^m(x)), f^n(x))) &\leq d(f^m(x)), f^{m-1}(x)) + \cdots + d(f^{n+1}(x)), f^n(x)) \\ &\leq \beta^n(l + \beta + \cdots + \beta^{m-n})d(x, f(x)) \\ &\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} \cdot d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Prema tome, $\{f^n(x)\}$ je Cauchyev niz, i postoji $z \in X$, tako da je $\lim_n f^n(x) = z$. Dokažimo da je $f(z) = z$. Za to je dovoljno dokazati $\lim_n f^{n+1}(x) = f(z)$.

Iz (2.73) sledi

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq d(f^{n+1}(x)), f(z)) + d(f^{n+1}(x)), z) \\ &\leq ad(f^n(x), f^{n+1}(x)) + bd(z, f(z)) \\ &\quad + cd(f^n(x), f(z)) + (e+1)d(f^{n+1}(x), z)) + fd(f^n(x), z). \end{aligned}$$

Kad uzmemo da $n \to \infty$, u gornjoj nejednakosti, dobijamo

$$d(z, f(z)) \leq (b+c)d(z, f(z)),$$

te iz uslova $b+c<1$ sledi $z = f(z)$. Da preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku, sledi iz uslova (2.73).

Da dokažemo deo (b), primetimo da zato što je (X, d) kompaktan metrički prostor i f neprekidno preslikavanje, postoji $y \in X$, tako da je

$$\inf\{d(x, f(x)) : x \in X\} = d(y, f(y)).$$

Sada iz uslova (2.76) sledi $y = f(y)$. Da preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku, sledi iz uslova (2.74). $\square$

Napomena 2.8.1 *Ukoliko u Teoremi 2.8.1 (a) uzmemo $\alpha = a + b + f$, tada dobijamo rezultat Reicha, Teoremu 2.7.1, a ukoliko u delu (b) uzmemo $\alpha = f = 1$, tada dobijamo rezultat Edelsteina, Teoremu 2.1.2.*

2.9 Ćirićeva kvazi-kontrakcija

U ovom poglavlju izlažemo pojedine rezultate Ćirića iz veoma značajnog rada [37] iz 1974. godine, gde je on uveo pojam kvazi-kontrakcije kao uopštenje pojma kontrakcije i izučavao fiksne tačke za takvo preslikavanje.

Definicija 2.9.1 *(Ćirić [37]) Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$, je kvazi-kontrakcija ako postoji realan broj λ, $0 < \lambda < 1$, tako da je*

$$d(fx, fy) \leq \lambda \cdot \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\}, \tag{2.83}$$

za svako $x, y \in X$.

Očigledno iz (1.1) sledi (2.83). Da obrnuto ne važi, pokazuje sledeći primer.

Primer 2.9.1 *(Ćirić [37]) Neka je*

$$M_1 = \{\frac{m}{n} : m = 0, 1, 3, 9, \ldots; n = 1, 4, \ldots, 3k + 1, \ldots\}$$
$$M_2 = \{\frac{m}{n} : m = 1, 3, 9, 27, \ldots; n = 2, 5, \ldots, 3k + 2, \ldots\}$$

i $M = M_1 \cup M_2$ metrički prostor sa uobičajenom metrikom $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in M$. Preslikavanje $f : X \mapsto X$, definisano sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x, & x \in M_1, \\ \frac{1}{8}x, & x \in M_2. \end{cases}$$

je kvazi-kontrakcija sa $\lambda = \frac{3}{5}$, a nije kontrakcija.

Da bismo vidli da preslikavanje f nije kontrakcija, možemo uzeti $x = 1$ i $y = \frac{1}{2}$. Tada je

$$d(fx, fy) = d\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{16}\right) = \frac{43}{80} > \frac{40}{80} = d(x, y).$$

Primer 2.9.2 *Neka je* $X = [0,3] \cup [4,5]$ *sa uobičajenom metrikom i* $f : X \mapsto X$ *definisano sa*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0,3], \\ 3, & \text{if} \quad x \in [4,5]. \end{cases}$$

Tada za svako $x \in [4,5]$ *imamo* $d(x, f(x)) \leq 2,\ d(f(x), f^2(x)) = 3$. *Dakle,* $d(f(x), f^2(x)) > d(x, f(x))$. *Pokažimo da* f *zadovoljava uslov (2.83).*

Neka je $x \in [0,3]$ *i* $y \in [4,5]$. *Tada je* $d(f(x), f(y)) = 3,\ d(y, fx) \geq 4$. *Prema tome,* $d(f(x), f(y)) = \frac{3}{4}4 \leq \frac{3}{4}\max\{d(x, f(y)), d(y, f(x))\}$.

Zato funkcija f *zadovoljava uslov (2.83) za* $\lambda = \frac{3}{4}$ *i svako* $x, y \in X$.

Primer 2.9.3 *Neka je* $f(x) = 0,\ 0 \leq x < 1, f(1) = 1/2$. *Tada funkcija* f *zadovoljava uslov (2.83) a ne zadovoljava uslov (2.62) [122]. Primetimo da je*

$$d(f(\frac{1}{2}), f(1)) = \frac{1}{2} = \frac{d(\frac{1}{2}, f(1)) + d(1, f(\frac{1}{2}))}{2},$$

$$d(\frac{1}{2}, 1) = d(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = d(1, f(1)) = \frac{1}{2},$$

$$d(f(x), f(y)) = 0, \quad x \neq y, \quad x, y \neq 1,$$

$$d(f(x), f(1)) = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \cdot d(1, f(x)) = \frac{3}{4}, \quad x \neq 1.$$

Teorema 2.9.1 *(Ćirić [37])Neka je* $f : X \mapsto X$ *kvazi-kontrakcija na metričkom prostoru* X *i neka je* X $f-$*orbitalno kompletan prostor. Tada*

a) f *ima jedinstvenu fiksnu tačku* $u \in X$,

b) $\lim_{n\to\infty} f^n x = u$ *za svako* $x \in X$,

c) $d(f^n x, u) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x, fx)$.

Dokaz: Ako je $E \subset X$ sa $diam(E)$ označavaćemo diametar skupa E.

Za $x \in X$ neka je

$$O(x,n) = \{x, fx, f^2x, \ldots, f^n x\}, \quad \alpha(x,n) = diam(O(x,n)),$$
$$O(x) = \{x, fx, f^2x, \ldots, f^n x, \ldots\}, \quad \alpha(x) = diam(O(x)).$$

Dokažimo da je

$$\alpha(fx, n-1) = diam(\{fx, f^2x, \ldots, f^n x\}) \leq \lambda\alpha(x,n). \tag{2.84}$$

Neka je $\alpha(fx, n-1) = d(f^j x, f^k x)$, gde je $1 \leq j < k \leq n$. Iz (2.83) sledi

$$\begin{aligned}
\alpha(fx, n-1) &= d(ff^{j-1}x, ff^{k-1}x) \\
&\leq \lambda \max\{d(f^{j-1}x, f^{k-1}x), d(f^{j-1}x, f^j x), d(f^{k-1}x, f^k x), \\
&\qquad d(f^{j-1}x, f^k x), d(f^{k-1}x, f^j x)\} \\
&\leq \lambda diam(\{f^{j-1}x, f^j x, \ldots, f^k x\}) \\
&\leq \lambda diam(\{x, fx, \ldots, f^n x\}) \\
&= \lambda \alpha(x, n)
\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali (2.84).

Iz (2.84) sledi

$$\alpha(x, n) = d(x, f^k x) \tag{2.85}$$

za neko $k \leq n$. Zaista, ako pretpostavimo $\alpha(x, n) > 0$ i $\alpha(x, n) = d(f^j x, f^k x)$ za neko $k > j \geq 1$, $k \leq n$, tada iz (2.84) sledi

$$\begin{aligned}
\alpha(x, n) = d(f^j x, f^k x) &= \alpha(f^j x, n-j) = \alpha(f(f^{j-1}x), n-j) \\
&\leq \lambda\, \alpha(f^{j-1}x, n-j+1) \leq \lambda \alpha(x, n)
\end{aligned}$$

što je kontrakcija. Ovim smo pokazali (2.85).

Dokažimo da je $\alpha(x) \in \mathbb{R}$. Iz (2.84), (2.85) i nejednakosti trougla, imamo

$$\begin{aligned}
\alpha(x, n) = d(x, f^k x) &\leq d(x, fx) + d(fx, f^k x) \\
&\leq d(x, fx) + \alpha(fx, n-1) \\
&\leq d(x, fx) + \lambda\, \alpha(x, n),
\end{aligned}$$

odnosno

$$\alpha(x, n) \leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot d(x, fx). \tag{2.86}$$

Niz $\{\alpha(x, n)\}$ je neopadajući i $\lim_{n\to\infty} \alpha(x, n) = \alpha(x)$. Kad $n \to \infty$ iz (2.86) sledi

$$\alpha(x) \leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot d(x, fx). \tag{2.87}$$

Dokažimo sada da je $\{f^n x\}$ Cauchyev niz. Neka je

$$\beta_n(x) = \alpha(f^n x) = diam(\{f^n x, f^{n+1}x, \ldots\}),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tada je $0 \leq \beta_n(x) \leq \alpha(x)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\{\beta_n(x)\}$ je nerastući niz. Postoji $\lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = \beta(x)$ i $\beta(x) \leq \beta_n(x)$ za svako $n \geq 0$.

Kad $n \to \infty$ iz (2.84) sledi

$$\alpha(fx) \leq \lambda\, \alpha(x). \tag{2.88}$$

Prema tome,

$$\beta_{n+1}(x) = \alpha(ff^n x) \leq \lambda\alpha(f^n x) = \lambda\, \beta_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$\beta(x) \leq \lambda\, \beta(x).$$

Sledi $\beta(x) = 0$, te je $\{f^n x\}$ Cauchyev niz. Kako je X $f-$orbitalno kompletan prostor, postoji $u \in X$ tako da je

$$\lim_{n\to\infty} f^n x = u.$$

Iz (2.83) sledi

$$\begin{aligned} d(fu, ff^n x) \leq \lambda\, \max\Big\{ & d(u, f^n x), d(u, fu), d(f^n x, f^{n+1} x), \\ & d(u, f^{n+1} x), d(f^n x, fu)\Big\}, \end{aligned}$$

odnosno

$$d(fu, u) \leq \lambda\, d(u, fu).$$

Zato je $d(u, fu) = 0$, tj., $fu = u$. Jedinstvenost fiksne tačke sledi iz (2.83). Ovim smo dokazali a) i b).

Dokažimo nejednakost c). Iz (2.88) sledi $\alpha(f^n x) \leq \lambda^n \alpha(x)$, a zatim iz (2.87)

$$\alpha(f^n x) \leq \lambda^n\, \frac{1}{1-\lambda} \cdot d(x, fx).$$

Neka je $m > n$, i $n, m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$d(f^n x, f^m x) \leq \alpha(f^n x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x, fx),$$

i kad $m \to \infty$ dobijamo c). $\Box$

2.10 Teorema Jungcka

Proučavanje egzistencije zajedničkih fiksnih tačka za dva ili više preslikavanja koja zadovoljavaju određene kontraktivne uslove je značajno zbog mnogih primena. Jungck je 1976. godine u radu [81] dokazao teoremu o zajedničkoj fiksnoj tački za dva preslikavanja koja komutiraju i time uopštio Banachov princip kontrakcije. U ovom poglavlju izlažemo pojedine rezultate Jungcka iz pomenutog rada [81].

Teorema 2.10.1 *(Jungck [81]) Neka je $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje na kompletnom metričkom prostoru (X, d). Tada f ima fiksnu tačku u X ako i samo ako postoji $\lambda \in (0, 1)$ i preslikavanje $g : X \mapsto X$ koje komutira sa f i zadovoljava uslove*

$$g(X) \subset f(X) \quad i \quad d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(f(x), f(y)) \quad \text{za svako } x, y \in X. \tag{2.89}$$

Osim toga, ako je ispunjen uslov (2.89), preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz: Da bismo vidli da je navedeni uslov potreban, pretpostavimo da je $f(a) = a$ za neko $a \in X$. Definišimo preslikavanje $g : X \mapsto X$ sa $g(x) = a$ za svako $x \in X$. Tada je $g(f(x)) = a$ i $f(g(x)) = f(a) = a,\ x \in X$. Prema tome, $f(g(x)) = g(f(x))$ za svako $x \in X$, i g komutira sa f. Osim toga, $g(x) = a = f(a)$ za svako $x \in X$, te je $g(X) \subset f(X)$. Ako je $\lambda \in (0, 1)$, sledi

$$d(g(x), g(y)) = d(a, a) = 0 \leq \lambda\, d(f(x), f(y)) \quad x, y \in X,$$

te je uslov (2.89) ispunjen.

Pretpostavimo sada da postoji preslikavanje $g : X \mapsto X$ koje komutira sa f i da je ispunjen uslov (2.89). Pokazaćemo da f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Neka je $x_0 \in X$. Iz $g(X) \subset f(X)$ sledi postoji $x_1 \in X$ tako da je $f(x_1) = g(x_0)$. Definišimo niz x_n tako da je

$$f(x_n) = g(x_{n-1}). \tag{2.90}$$

Iz (2.89) i (2.90) sledi

$$d(gx_n, gx_{n-1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \lambda d(f(x_n), f(x_{n-1})), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zato je $f(x_n)$ Cauchyjev niz, i postoji $t \in X$ tako da

$$f(x_n) \to t. \tag{2.91}$$

Sada iz (2.90) sledi

$$g(x_n) \to t. \tag{2.92}$$

Kako je f neprekidno preslikavanje, iz (2.89) sledi da je i g neprekidna funkcija. Iz (2.91) i (2.92) sledi $g(f(x_n)) \to g(t)$ i $f(g(x_n)) \to f(t)$. Kako f i g komutiraju, sledi $g(f(x_n)) = f(g(x_n))$ za svako n. Zato je $f(t) = g(t)$, a zbog komutativnosti imamo $f(f(t)) = f(g(t)) = g(g(t))$. Prema tome

$$d(g(t), g(g(t))) \leq \lambda\, d(f(t), f(g(t))) = \lambda\, d(g(t), g(g(t))),$$

odnosno $g(t) = g(g(t)) = f(g(t))$, tj. $g(t)$ je zajednička fiksna tačka za f i g.

Dokažimo da f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku. Pretpostavimo da je $x = f(x) = g(x)$ i $y = f(y) = g(y)$. Tada iz (2.89) sledi

$$d(x, y) = d(g(x), g(y)) \leq \lambda\, d(f(x), f(y)) = \lambda\, d(x, y),$$

odnosno $x = y$. $\square$

Posledica 2.10.1 *Neka su $f, g : X \mapsto X$ komutativna preslikavanja na kompletnom metričkom prostoru (X, d). Pretpostavimo da je f neprekidno i $g(X) \subset f(X)$. Ako postoji $\lambda \in (0, 1)$ i $k \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$d(g^k(x), g^k(y)) \leq \lambda d(f(x), f(y)), \quad x,\, y \in X,$$

tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz: Očigledno g^k komutira sa f i $g^k(X) \subset g(X) \subset f(X)$. Iz prethodne teoreme sledi postoji jedinstveno $a \in X$ tako da je $a = f(a) = g^k(a)$. Zato što f i g komutiraju, sledi $g(a) = f(g(a)) = g^k(g(a))$, te je $g(a)$ zajednička fiksna tačka za f i g^k. Iz jedinstvenosti a, sledi $a = g(a) = f(a)$. $\square$

Napomena 2.10.1 *Banachov princip kontrakcije dobijamo iz Posledice 2.10.1 za $k = 1$ i ako je $f = i$ identično preslikavanje $i(x) = x, x \in X$. Primetimo da se u Posledici 2.10.1 ne zahteva neprekidnost funkcije g.*

Posledica 2.10.2 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $K > 1$ realan broj. Ako je (X, d) kompletan metrički prostor, $g : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje i preslikavanje na, tako da je*

$$d(g^n(x), g^n(y)) \geq K\, d(x, y) \qquad \text{za svako} \quad x, y \in X,$$

tada g ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz: Dokaz sledi kad u Teoremi 2.10.1 uzmemo $\lambda = \frac{1}{K}$ i $f = g^{n+1}$. (Primedba: drugačiji dokaz sledi ako se u Teoremi 2.10.1 za g uzme identično preslikavanje i, a za f uzme g^n i $\lambda = \frac{1}{K}$.) $\square$

U sledećem interesantnom primeru Jungck [81] je definisao dva preslikavanja tako da nijedno od njih nije kontrakcija. Prema tome, Banachova teorema nije primenljiva na njih. Osim toga, nijedno od tih preslikavanja nije ekspanzivno u smislu Posledice 2.10.2(za $n = 1$). Kako ta preslikavanja zadovoljavaju uslove Teoreme 2.10.1, imaju zajedničku fiksnu tačku.

Primer 2.10.1 *(Jungck [81]) Neka je $X = \mathbb{R}^2$ Euklidov dvodimenzionalni prostor sa uobičajenom metrikom d. Za $p = (x, y) \in X$ definišimo preslikavanja $f, g : X \mapsto X$ sa, $g(p) = (7x, \frac{y}{3} + 4)$ i $f(p) = (11x, \frac{y}{2} + 3)$. Tada je $f(g(p)) = (77x, \frac{y}{6} + 5) = g(f(p))$, i zato f i g komutiraju. Može se dokazati da je*

$$d(f(p), f(q)) \geq \frac{3}{2} d(g(p), g(q)).$$

Prema tome, ako u Teoremi 2.10.1 uzmemo $\lambda = \frac{2}{3}$, sledi f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Neka je $q = (x', y')$. Stavljajući $y = y'$(videti definiciju za p), dobijamo $d(f(p), f(q)) = 11d(p, q)$. Dakle, f nije kontrakcija. Slično, stavljajući $x = x'$, dobijamo $d(f(p), f(q)) = \frac{1}{2} d(p, q)$, i f nije ekaspanzivno preslikavanje. Iz istih primera se mogu dobiti analogni zaključci za preslikavanje g.

2.11 Rezultati Dasa i Naika

Das i Naik su 1979. godine u radu [46] uopštili pojedine rezultate Jungcka [81] i Ćirića [37]. Izložimo neke rezultate iz pomenutog rada [46].

Stalne pretpostavke u ovoj sekciji: Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $f, g : X \mapsto X$ i

$$g(X) \subset f(X). \tag{2.93}$$

Ako $x_0 \in X$ izaberimo $x_1 \in X$ tako da je $g(x_0) = f(x_1)$, i definišimo niz $x_n \in X$ tako da je $g(x_n) = f(x_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Neka je $y_n = g(x_n) = f(x_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$O(y_k; n) = \{y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n}\}$$

i $\delta(E) = \operatorname{diam}(E)$ diametar podskupa $E \subset X$.

Pretpostavimo da postoji konstanta $\lambda \in (0,1)$ tako da je za svako $x, y \in X$,

$$d(gx, gy) \leq \lambda \cdot \max\Big\{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\Big\}. \tag{2.94}$$

Lema 2.11.1 *Za $k \geq 0$ i $n \in N$, pretpostavimo da je $\delta(O(y_k; n)) > 0$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$, $k < j \leq k + n$, tako da je $\delta(O(y_k; n)) = d(y_k, y_j)$. Osim toga*

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \lambda\, \delta(O(y_{k-1}; n+1)) \qquad (k \geq 1). \tag{2.95}$$

Dokaz: Neka je $1 \leq i < j$. Tada je

$$\begin{aligned} &d(y_i, y_j) = d(gx_i, gx_j) \\ &\leq \lambda \max\{d(fx_i, fx_j), d(fx_i, gx_i), d(fx_j, gx_j), d(fx_i, gx_j), d(fx_j, gx_i)\} \\ &= \lambda \max\{d(y_{i-1}, y_{j-1}), d(y_{i-1}, y_i), d(y_{j-1}, y_j), d(y_{i-1}, y_j), d(y_{j-1}, y_i)\}. \end{aligned}$$

Sledi

$$d(y_i, y_j) \leq \lambda\, \delta(O(y_{i-1}, j - i + 1)). \tag{2.96}$$

Primetimo da je $\delta(O(y_k; n)) = d(y_i, y_j)$, gde $i, j \in \mathbb{N}$ i $k \leq i < j \leq k + n$.

Ako je $i > k$, iz (2.96) sledi

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \lambda\, \delta(O(y_{i-1}; j - i + 1))$$

za $i - 1 \geq k$ i $j \leq k + n$. Prema tome

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \lambda\, \delta(O(y_k; n)),$$

što je kontradikcija. Sledi $i = k$. Osim toga,

$$\begin{aligned} \delta(O(y_k; n)) = d(y_k, y_j) &\leq \lambda\, \delta(O(y_{k-1}; j - k + 1)) \\ &\leq \lambda\, \delta(O(y_{k-1}; n + 1)). \quad \square \end{aligned}$$

Lema 2.11.2 *Ako važe pretpostavke prethodne leme, tada je*

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \cdot d(y_0,y_1). \tag{2.97}$$

Dokaz: Za $j \leq l+m$ važi

$$\begin{aligned}\delta(O(y_l;m)) = d(y_l,y_j) &\leq d(y_l,y_{1+l}) + d(y_{1+l},y_j)\\ &\leq d(y_l,y_{1+l}) + \delta(O(y_{1+l};m-1)),\end{aligned}$$

Prema tome, iz (2.96) sledi

$$\delta(O(y_l;m)) \leq d(y_l,y_{1+l}) + \lambda\,\delta(O(y_l;m)),$$

odnosno

$$\delta(O(y_l;m)) \leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot d(y_l,y_{1+l}). \tag{2.98}$$

Iz (2.95) sledi

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \lambda^k \delta(O(y_0;n+k)),$$

a iz (2.98) za $l=0$, $m=n+k$, sledi (2.97). □

Teorema 2.11.1 *(Das i Naik [46]) Neka je X kompletan metrički prostor, $f: X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje i $g: X \mapsto X$ preslikavanje koje komutira sa f. Pretpostavimo da je $g(X) \subset f(X)$ i da postoji konstanta $\lambda \in (0,1)$ tako da je za svako $x,y \in X$,*

$$d(gx,gy) \leq \lambda \cdot M(x,y), \tag{2.99}$$

gde je

$$M(x,y) = \max\Big\{d(fx,fy), d(fx,gx), d(fx,gy), d(fy,gy), d(fy,gx)\Big\}.$$

Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz: Primetimo da je dovoljno pokazati da postoji $y \in X$ tako da je $f(y) = g(y)$. U tom slučaju, iz

$$\begin{aligned}d(ggy,gy) &\leq \lambda \max\Big\{d(fgy,gy), d(fgy,ggy), d(fy,gy),\\ &\qquad d(fgy,gy), d(fy,ggy)\Big\}\\ &= \lambda\, d(ggy,gy)\end{aligned}$$

sledi $g(y)$ je fiksna tačka za g. Kako je $f(gy) = g(fy) = g(gy) = g(y)$, to je $g(y)$ takođe fiksna tačka i za f.

Ako je za neko n i k, $\delta(O(y_k; n)) = 0$, sledi $y_k = y_{k+1}$, tj. $f(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$. Neka je $\delta(O(y_k; n)) > 0$. Za dato $\varepsilon > 0$, neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\lambda^{n_0} d(y_0, y_1) < (1-\lambda)\varepsilon$. Sada iz Leme 2.11.2, za $m > n \geq n_0$ sledi

$$d(y_m, y_n) \leq \delta(O(y_{n_0}; m - n_0)) < \varepsilon.$$

Prema tome, $\{y_n\}$ je Cauchyev niz na kompletnom metričkom prostoru, pa je konvergentan. Neka je y njegova granica. Na osnovu neprekidnosti funkcije f, $\{f(y_n)\}$ konvergira ka $f(y)$. Kako je $g(y_n) = f(y_{n+1})$, $n =\in \mathbb{N}$, sledi $\lim_n g(y_n) = f(y)$. Iz

$$\begin{aligned} d(fy_{n+1}, gy) &= d(gy_n, gy) \\ &\leq \lambda \max\{d(fy_n, fy), d(fy_n, gy_n), d(fy, gy), d(fy_n, gy), d(fy_n, gy_n)\} \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$, sledi $d(fy, gy) \leq \lambda d(fy, gy)$, odnosno $fy = gy$. Jedinstvenost zajedničke fiksne tačke sledi neposredno iz (2.99). $\square$

Napomena 2.11.1 *Iz Teoreme 2.11.1 slede Teorema 2.10.1 i Teorema 2.9.1.*

Teorema 2.11.2 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Neka $f : X \mapsto X$ i neka je f^2 neprekidno preslikavanje. Neka $g : f(X) \mapsto X$,*

$$gf(X) \subset f^2(X) \tag{2.100}$$

i $f(g(x)) = g(f(x))$ uvek kada su obe strane jednakosti definisane. Dalje, neka postoji broj $\lambda \in (0, 1)$ takav da važi (2.99) za svako $x, y \in X$. Onda f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz: Polazeći od proizvoljne tačke $x_0 \in f(X)$ i koristeći uslov (2.100), konstruišimo niz tačaka $\{x_n\}$ iz $f(X)$ takav da je $f(x_{n+1}) = g(x_n) = y_n$. Primetimo da je

$$f(y_n) = f(g(x_n)) = g(f(x_n)) = g(y_{n-1}) = z_n.$$

Iz Leme 2.11.1 i Leme 2.11.2 sledi

$$\delta(O(z_k; n)) \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \cdot d(z_0, z_1), \quad k \geq 0,\, n \in \mathbb{N}.$$

Zato je $\{z_n\}$ Cauchyev niz u X, i prema tome postoji $z \in X$ tako da je $\lim_n z_n = z$. Iz neprekidnosti f^2, sledi $\lim_n f^2(z_n) = f^2(z)$. Osim toga iz

$$gf(z_n) = gf(f^2 x_{n+1}) = f^2(f(gx_{n+1})) = f^2(z_{n+1})$$

sledi $\lim_n gf(z_n) = f^2(z)$. Kad $n \to \infty$ iz

$$\begin{aligned} d(f^2 z_{n+1}, gfz) &= d(gfz_n, gfz) \\ &\leq \lambda \max \Big\{ d(f^2 z_n, f^2 z), d(f^2 z_n, gfz_n), d(f^2 z, gfz), \\ &\qquad d(f^2 z_n, gfz), d(f^2 z, gfz_n) \Big\} \end{aligned}$$

sledi $d(f^2 z, gfz) \leq \lambda\, d(f^2 z, gfz)$, odnosno $f^2 z = gfz$. Sada je

$$\begin{aligned} d(g(gfz), gfz) &\leq \lambda \max \Big\{ d(fgfz, f^2 z), d(fgfz, ggfz), d(f^2 z, gfz), \\ &\qquad d(fgfz, gfz), d(f^2 z, ggfz) \Big\} \\ &\leq \lambda\, d(g(gfz), gfz), \end{aligned}$$

odnosno $g(gfz) = gfz$. Zato je $f(gfz) = (fg)(fz) = (gf)(fz) = g(f^2 z) = g(gfz) = gfz$, te je gfz fiksna tačka preslikavanja f. Prema tome f i g imaju zajedničku fiksnu tačku. Jedinstvenost sledi iz (2.99). □

Kao posledicu dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.11.3 *(Das i Naik [46]) Neka važe sve pretpostavke Teoreme 2.10.1 osim uslova neprekidnosti preslikavanja f. Neka je f^2 neprekidno preslikavanje. Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Dokaz: Iz $f(X) \supset g(X)$ sledi $f^2(X) \supset f(g(X)) = g(f(X))$, te je ispunjen uslov (2.100). Kako je i uslov (2.99) ispunjen, dokaz sledi iz Teoreme 2.11.2. □

Sledeći primer pokazuje da su Das i Naik zaista uopštili rezultat Jungcka.

Primer 2.11.1 *Neka je $X = (-\infty, \infty)$ sa uobičajenom metrikom. Definišimo funkcije $f, g : X \mapsto X$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -1], \\ x, & x \in (-1, 1), \\ -1, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

i

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2}, & x \in (-1, 0), \\ \frac{1-x}{2}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty). \end{cases}$$

Očigledno je f prekidna funkcija, i sve ostale pretpostavke iz Teoreme 2.10.1 su ispunjene. Prema tome, Jungckova teorema se ne može primeniti, ali kako je f^2 neprekidna funkcija, to jedinstvena zajednička fiksna tačka 1/3 za f i g sledi na osnovu Teoreme 2.11.3.

Na sličan način kao što je dokazana Teorema 2.11.2 dokazuje se i sledeća teorema.

Teorema 2.11.4 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $f : X \mapsto X$, i $m \in \mathbb{N}$ tako da je f^m neprekidna funkcija. Neka je $g : f^{m-1}(X) \mapsto X$,*

$$g(f^{m-1}(X)) \subset f^m(X)$$

i neka g i f komutiraju. Pretpostavimo još da postoji $\lambda \in (0, 1)$ tako da je uslov (2.99) ispunjeno za svako $x, y \in f^{m-1}(X)$. Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

2.12 Teorema Sessa

Sessa [133] je 1982. godine uveo pojam slabo komutirajućih(komutativnih) preslikavanja, a zatim je uopštio rezultate Jungcka [81] i Dasa i Naika [46]. Ovde izlažemo pojedine rezultate iz pomenutog rada [133].

Definicija 2.12.1 *Neka je (X, d) metrički prostor.Za dva preslikavanja g i $f : X \mapsto X$ kažemo da su slabo komutirajuća(komutativna) ako je*

$$d(fgx, gfx) \leq d(fx, gx), \text{ za svako } x \in X. \tag{2.101}$$

Neka je $\mathbb{R}^+$ skup nenegativnih realnih brojeva, $f, g : X \mapsto X$ i $g(X) \subset f(X)$. Kao i u prethodnoj sekciji, definišimo niz (x_n) iz X na sledeći način: za proizvoljno $x_0 \in X$ neka je $g(x_n) = f(x_{n+1}) = y_n$. Pretpostavimo da preslikavanja f i g zadovoljavaju uslov

$$d(gx, gy) \leq \varphi(M(x, y)) \tag{2.102}$$

gde je $\varphi : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ neopadajuća funkcija, neprekidna sa desne strane, takva da je $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$, a $M(x, y)$ je definisano sa

$$M(x, y) = \max\Big\{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\Big\}.$$

Pre nego što pokažemo glavnu teoremu dokažimo sledeće dve leme.

Lema 2.12.1 *Ako je $t_0 \in \mathbb{R}^+$ i $t_k = \varphi(t_{k-1})$, $k \geq 1$, tada je*

$$t_\infty = \lim_{k\to\infty} t_k = 0.$$

Dokaz: Očigledno je $t_\infty \geq 0$. Ako je $t_\infty > 0$, tada je

$$\varphi(t_\infty) < t_\infty \leq t_k = \varphi(t_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prema tome,

$$\varphi(t_\infty) < t_\infty \leq \lim_{k\to\infty} \varphi(t_{k-1}) = \varphi(t_\infty),$$

što je kontradikcija. Sledi $t_\infty = 0$. $\square$

Akoje $E \subset X$, neka je $\delta(E) = \mathrm{diam}(E)$ diametar skupa E.

Lema 2.12.2 *Neka je $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje, $g : X \mapsto X$, $g(X) \subset f(X)$ i neka je ispunjen uslov (2.102). Pretpostavimo da je za $k \geq 0$ i $n \geq 1$, $\delta(O(y_k; n)) > 0$ i $\delta(O(y_0; \infty)) < \infty$. Tada je*

$$\delta(O(y_k; n)) \leq \varphi^k(\delta(O(y_0, \infty))).$$

Dokaz: Neka je $k \leq i < j \leq k + n$. Iz (2.102) sledi

$$d(y_i, y_j) = d(gx_i, gx_j) \leq \varphi(M(x_i, x_j)) \leq \varphi(\delta(O(y_{i-1}, j - i + 1))),$$

gde je

$$\begin{aligned} M(x_i, x_j) &= \max\{d(fx_i, fx_j), d(fx_i, gx_i), d(fx_j, gx_j), d(fx_i, gx_j), d(fx_j, gx_i)\} \\ &= \max\{d(y_{i-1}, y_{j-1}), d(y_{i-1}, y_i), d(y_{j-1}, y_j), d(y_{i-1}, y_j), d(y_{j-1}, y_i)\}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \varphi(\delta(O(y_{i-1}, j-i+1))). \tag{2.103}$$

Dokažimo da je $i = k$. Ako je $i > k$, iz (2.103) za $i-1 \geq k$ i $j \leq k+n$ imamo

$$\delta(O(y_k;n)) \leq \varphi(\delta(O(y_{i-1}, j-i+1))) \leq \varphi(\delta(O(y_k;n))) < \delta(O(y_k;n)),$$

što je kontradikcija. Sada iz (2.103) dobijamo

$$\begin{aligned}\delta(O(y_k;n)) &\leq \varphi(\delta(O(y_{k-1}, j-k+1))) \leq \varphi(\delta(O(y_{k-1}, n+1))) \\ &\leq \varphi^k(\delta(O(y_0;n+k)))\end{aligned}$$

pa dokaz leme sledi iz uslova da je φ neopadajuća funkcija i da je $\delta(O(y_0;\infty)) < \infty$. □

Teorema 2.12.1 *Neka je $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje i $g : X \mapsto X$ preslikavanje koje ispunjava uslove (2.101), (2.102) i $g(X) \subset f(X)$. Ako postoji $x_0 \in X$ tako da je $\delta(O(y_0;\infty)) < \infty$, tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Dokaz: Razlikujemo dva slučaja, pri čemu ćemo u oba pokazati da postoji tačka $u \in X$ takva da je $f(u) = g(u)$.

Slučaj 1. ukoliko postoje $k \geq 0$ i $n \geq 1$ tako da je $\delta(O(y_k;n)) = 0$, sledi $y_k = y_{k+1}$, te je $f(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$.

Slučaj 2. ukoliko je $\delta(O(y_k;n)) > 0$ za svako $k \geq 0$ i $n \geq 1$, onda iz Leme 2.12.1, za dato $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 > 1$ tako da je $\varphi^{n_0}(\delta(O(y_0;\infty))) < \varepsilon$. Sada iz Leme 2.12.2, za $m > n \geq n_0$, imamo $d(y_m, y_n) \leq \delta(O(y_{n_0}, m-n_0)) < \varepsilon$.

Ovo znači da je $\{y_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ Cauchyev niz, pa zbog kompletnosti prostora X, postoji tačka $z \in X$ takva da je $z = \lim y_n$. Kako je f neprekidno preslikavanje, niz $\{fy_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ konvergira ka fz.

Dalje, iz (2.101) sledi

$$\begin{aligned}d(gy_n, fz) &\leq d(gy_n, fy_{n+1}) + d(fy_{n+1}, fz) \\ &= d(gfx_{n+1}, fgx_{n+1}) + d(fy_{n+1}, fz) \\ &\leq d(fx_{n+1}, gx_{n+1}) + d(fy_{n+1}, fz) = d(y_n, y_{n+1}) + d(fy_{n+1}, fz).\end{aligned}$$

Zatim, kada $n \to \infty$, gornje nejednakosti pokazuju da niz $\{gy_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ konvergirati ka fz. Takođe

$$M(y_n, z) = \max\{d(fy_n, fz), d(fy_n, gy_n), d(fz, gz), d(fy_n, gz), d(fz, gy_n)\}$$

konvergira ka $d(fz, gz)$. Iz (2.102) dobijamo $d(gy_n, gz) \leq \varphi(M(y_n, z))$, a zato što je funkcija φ neprekidna sa desne strane, sledi

$$d(fz, gz) = \lim d(gy_n, gz) \leq \limsup \varphi(M(y_n, z)) \leq \varphi(d(fz, gz)),\ n \to \infty.$$

Prema tome, $d(fz, gz) = 0$.

U oba slučaja smo pokazali da postoji $z \in X$ tako da je

$$fz = gz. \tag{2.104}$$

Sada iz (2.104) sledi

$$fgz = gfz = ggz. \tag{2.105}$$

Iz (2.102), (2.104) i (2.105) sledi

$$d(ggz, gz) \leq \varphi(M(gz, z)) = \varphi(d(ggz, gz)),$$

te je $d(ggz, gz) = 0$, odnosno gz fiksna tačka za g. Iz (2.105) zaključujemo da je gz fiksna tačka i za f.

Pokažimo sada jedinstvenost zajedničke fiksne tačke. Neka su u i v dve različite zajedničke fiksne tačke preslikavanja f i g. Tada je

$$d(u, v) = d(gu, gv) \leq \varphi(M(u, v)) = \varphi(d(u, v)) < d(u, v),$$

što je kontradikcija. $\Box$

Posledica 2.12.1 *Teorema 2.11.1 sledi iz Teoreme 2.12.1, ako uzmemo da je $\varphi(t) = \lambda t$ za svako $t \geq 0$.*

U sledećim primerima može se primeniti Teorema 2.12.1, ali ne i Teorema 2.11.1.

Primer 2.12.1 *Neka je dat prostor $X = [0, 1]$ sa uobičajenom metrikom. Definišimo preslikavanja g i f na sledeći način: $gx = \frac{x}{2+x}$, $fx = \frac{x}{2}$. Dalje, neka je $\varphi(t) = \frac{t}{(1+t)}$ za svako $t \geq 0$. Tada je*

$$g(X) = [0, \frac{1}{3}], \quad f(X) = [0, \frac{1}{2}], \quad \varphi(t) < t \text{ za } t > 0.$$

Za svako $x \in X$ je

$$\begin{aligned} d(fgx, gfx) &= \frac{x}{4+x} - \frac{x}{4+2x} = \frac{x^2}{(4+x)(4+2x)} \\ &\le \frac{x^2}{4+2x} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2+x} = d(fx, gx). \end{aligned}$$

Šta više, za svako $x, y \in X$ je

$$\begin{aligned} d(gx, gy) &= \left| \frac{x}{2+x} - \frac{y}{2+y} \right| = \frac{2|x-y|}{(2+x)(2+y)} \le \frac{|x-y|}{2+|x-y|} \\ &= \varphi\left(\frac{|x-y|}{2}\right) = \varphi(d(fx, fy)) \le \varphi(M(x, y)). \end{aligned}$$

Može se pokazati da su i ostali uslovi iz Teoreme 2.12.1 ispunjeni. Teorema 2.11.1 nije primenljiva zato što g ne komutira sa f, budući da je

$$gfx = \frac{x}{4+x} > \frac{x}{4+2x} = fgx, \text{ za svako } x \in X, \ x \neq 0.$$

Ovaj primer pokazuje da je Teorema 2.12.1 opštija od Teoreme 2.11.1 jer ne zahteva komutativnost preslikavanja.

Primer 2.12.2 *Neka je dat prostor $X = (-\infty, \infty)$ sa uobičajenom metrikom. Definišimo preslikavanja $g, f : X \mapsto X$ i funkciju φ na sledeći način*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x - \frac{x^2}{2}, & 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

i

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{t}{2}, & t > 1. \end{cases}$$

Sada je $g(X) = [0, \frac{1}{2}]$, $f(X) = [0, 1]$, $\varphi(t) < t$ za $t > 0$ i $fgx = gfx$ za svako $x \in X$. Pored toga,

$$x \le 0 \quad i \quad y \le 0 \quad \Rightarrow \quad d(gx, gy) = 0 = \varphi(d(fx, fy)),$$

$$
\begin{aligned}
&x \le 0 \quad i \quad 0 < y \le 1 \quad \Rightarrow \quad d(gx, gy) = y - \frac{y^2}{2} = \varphi(d(fy, gx)),\\
&x \le 0 \quad i \quad y > 1 \quad \Rightarrow \quad d(gx, gy) = \frac{1}{2} = \varphi(d(fy, gx)),\\
&0 < x \le 1 \quad i \quad 0 < y \le 1 \quad \Rightarrow\\
&\qquad d(gx, gy) = |x - y|(1 - \frac{x + y}{2})\\
&\qquad\qquad \le |x - y|(1 - \frac{|x - y|}{2}) = \varphi(d(fx, fy)),\\
&0 < x \le 1 \quad i \quad y > 1 \quad \Rightarrow\\
&\qquad d(gx, gy) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \le \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\\
&\qquad\qquad = (1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2} = \varphi(d(fx, fy)),\\
&x > 1 \quad i \quad y > 1 \quad \Rightarrow \quad d(gx, gy) = 0 = \varphi(d(fx, fy)).
\end{aligned}
$$

Na osnovu gornjih rezultata, za svako $x, y \in X$, imamo $d(gx, gy) \le \varphi(M(x, y))$, te je ispunjen uslov (2.102). Sve ostale pretpostavke iz Teoreme 2.12.1 su ispunjene, ali to nije slučaj i za Teoremu 2.11.1. Zaista, za $x = 0$ i $0 < y \le 1$ imamo

$$
y - \frac{y^2}{2} \le \lambda \max\left\{y, 0, \frac{y^2}{2}, y - \frac{y^2}{2}, y\right\} = \lambda y,
$$

i zato je $1 - \frac{y}{2} \le \lambda$. Iz $y \to 0$ sledi $1 \le \lambda$, što je kontradikcija.

2.13 Slučaj $g : C \mapsto X,\ C \subset X$

Izučavanje fiksnih tačaka preslikavanja $g : C \mapsto X,\ C \subset X$ značajno je zbog mnogih primena.

Sledeća teoreme je rezultat Ćirića.

Teorema 2.13.1 *(**Ćirić, [41]**) Neka je X Banachov prostor, C neprazan podskup od X, i ∂C rub od C. Neka je $T : C \mapsto X$ preslikavanje, takvo da za neko $\lambda \in (0, 1)$ i svako $x, y \in C$ važi*

$$
d(Tx, Ty) \le \lambda \cdot \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}. \tag{2.106}
$$

Pretpostavimo da je

$$
T(\partial C) \subset C. \tag{2.107}
$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku u C.

Prema Ćiriću([41]), "problem uopštavanja rezultata o fiksnim tačkama zapreslikavanje $T : C \mapsto C$, definisanih sa (2.106), kako bi se dobili odgovarajući rezultati za preslikavanje $T : C \mapsto X, C \neq X$, bio je otvoren više od 20. godina".

U radu [41], Ćirić je koristio nove metode i dokazao teoreme o postojanju fiksne tačke za klasu preslikavanja $f : C \mapsto X, C \subset X$, definisanu sa (2.106), koja zadovoljava dodatni uslov (2.107).

Pretpostavimo da je X normirani prostor. Za $x, y \in X$ neka je

$$seg\,[x, y] = \{z \in X : z = (1-t)x + ty,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

segment sa krajnjim tačkama x i y.

U dokazu sledeće teoreme koristimo sledeću činjenicu: ako je $u \in X$ i $z_0 = (1-t_0)x + t_0 y \in seg\,[x, y],\ 0 \leq t_0 \leq 1$, tada je

$$\begin{aligned} \|u - z_0\| &= \|(1-t_0)u + t_0 u - (1-t_0)x - t_0 y\| \\ &\leq (1-t_0)\|u - x\| + t_0\|u - y\| \\ &\leq \max\{\|u - x\|, \|u - y\|\}. \end{aligned}$$

Rakočević je u radu [113] dokazao teoremu o postojanju zajedničke fiksne tačke za par preslikavanja na Banachovom prostoru. Na taj način dobijeno je proširenje Ćirićevog rezultata, a pored toga dobijeni su i glavni rezultati K. M. Dasa i K. V. Naika [46], i uopšteni rezultati K. M. Dasa i K. V. Naika [46] i Jungcka [81].

Teorema 2.13.2 *(***Rakočević, [113]***). Neka je X Banachov prostor, C neprazan zatvoren podskup od X i ∂C rub od C. Neka su data preslikavanja $g : C \mapsto X$, $f : X \mapsto X$ i $f : C \mapsto C$. Pretpostavimo da je $\partial C \neq \emptyset$, f neprekidno preslikavanje, i pretpostavimo da f i g zadovoljavaju sledeće uslove:*

(i) Postoji konstanta $\lambda \in (0,1)$ tako da za svako $x, y \in C$

$$d(gx, gy) \leq \lambda \cdot M(x, y), \tag{2.108}$$

gde je

$$M(x, y) = \max\Big\{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\Big\}. \tag{2.109}$$

(ii) f i g slabo komutiraju na C, tj. za svako $x \in C$ ispunjen je uslov

$$d(fgx, gfx) \leq d(fx, gx). \tag{2.110}$$

(iii)

$$g(C) \cap C \subset f(C). \tag{2.111}$$

(iv)

$$g(\partial C) \subset C. \tag{2.112}$$

(v)

$$f(\partial C) \supset \partial C. \tag{2.113}$$

Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u C.

Dokaz: Neka je $x_0 \in \partial C$. Konstruišimo niz $\{x_n\}$ iz C na sledeći način: iz (2.112) sledi $gx_0 \in C$. Zato, iz (2.111) sledi postoji $x_1 \in C$ tako da je $fx_1 = gx_0$. U zavisnosti od gx_1, razlikujemo dva slučaja. Ako $gx_1 \in C$, tada ponovo na osnovu (2.111) postoji $x_2 \in C$ tako da je $fx_2 = gx_1$. Ako $gx_1 \notin C$, na osnovu (2.113) postoji $x_2 \in \partial C$ tako da je $fx_2 \in \partial C \cap [fx_1, gx_1]$.

Sada, induktivno konstruišemo niz tačaka $\{x_n\}$ iz C na sledeći način. Ako je $gx_n \in C$, tada iz (2.111) biramo $x_{n+1} \in C$ tako da je $fx_{n+1} = gx_n$. Ako $gx_n \notin C$, tada na osnovu (2.113) biramo $x_{n+1} \in \partial C$ tako da je

$$fx_{n+1} \in \partial C \cap seg[fx_n, gx_n].$$

Dokažimo da su $\{fx_n\}$ i $\{gx_n\}$ Cauchyevi nizovi. Prvo pokažimo

$$fx_{n+1} \neq gx_n \Rightarrow fx_n = gx_{n-1}. \tag{2.114}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. $fx_n \neq gx_{n-1}$. Tada $x_n \in \partial C$. Sada, iz (2.111) sledi $gx_n \in C$, a odatle je $fx_{n+1} = gx_n$, što je kontrakcija. Ovim smo dokazali (2.114). Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} B(n,k) &= \{fx_j, gx_j : n \leq j \leq n+k\}, \qquad & b(n,k) &= diam(B(n,k)), \\ B(n) &= \{fx_j, gx_j : n \leq j\}, & b(n) &= diam(B(n)). \end{aligned}$$

Kako $b(n,k) \uparrow b(n)$ kada $k \to \infty$ i $b(n) \downarrow$, postoji $b = \lim_n b(n) \geq 0$. Očigledno su $\{fx_n\}$ i $\{gx_n\}$ Cauchyevi nizovi ako je $b = 0$. Prvo dokažimo da je

$$b(n,k) \leq \lambda\, b(n-2, k+2), \quad n,k \geq 2. \tag{2.115}$$

Razlikovaćemo tri slučaja.

1. slučaj $b(n,k) = d(fx_i, gx_j)$ za $n \le i, j \le n+k$.

Ako je $fx_i = gx_{i-1}$, tada je

$$b(n,k) = d(gx_{i-1}, gx_j) \le \lambda\, M(x_{i-1}, x_j) \le \lambda\, b(n-2, k+2).$$

Ako je $fx_i \ne gx_{i-1}$, tada je $fx_{i-1} = gx_{i-2}$ i tada je

$$fx_i \in seg[fx_{i-1}, gx_{i-1}] = seg[gx_{i-2}, gx_{i-1}].$$

Takođe je

$$\begin{aligned} b(n,k) = d(fx_i, gx_j) &\le \max\{d(gx_{i-2}, gx_j),\, d(gx_{i-1}, gx_j)\} \\ &\le \lambda\, \max\{M(x_{i-2}, x_j), M(x_{i-1}, x_j)\} \le \lambda\, b(n-2, k+2). \end{aligned}$$

2. slučaj $b(n,k) = d(fx_i, fx_j)$ za $n \le i, j \le n+k$.

Ako je $fx_j = gx_{j-1}$, tada se slučaj 2 svodi na slučaj 1.

Ako je $fx_j \ne gx_{j-1}$, tada kao i u slučaju 1. imamo $j \ge 2$, $fx_{j-1} = gx_{j-2}$ i

$$fx_j \in \partial C \cap seg[gx_{j-2}, gx_{j-1}].$$

Sada je

$$b(n,k) = d(fx_i, fx_j) \le \max\{d(fx_i, gx_{j-2}), d(fx_i, gx_{j-1})\}$$

pa se slučaj 2 svodi na slučaj 1.

3. slučaj Preostali slučaj $b(n,k) = d(gx_i, gx_j)$ za $n \le i, j \le n+k$ je trivijalan.

Ako u (2.115) $k \to \infty$ dobijamo $b(n) \le \lambda\, b(n-2)$, a kada $n \to \infty$ dobijamo $b \le \lambda\, b$. Dakle, $b = 0$. Odavde sledi da su nizovi $\{fx_n\}$ i $\{gx_n\}$ Cauchyevi nizovi. Kako je C zatvoren podskup Banachovog prostora X i $fx_n \in C$ sledi $\lim_n fx_n = y \in C$. Iz

$$d(fx_n, gx_n) \le b_n \to 0,\ n \to \infty,$$

imamo $\lim_n gx_n = y$, te je

$$\lim_n gx_n = \lim_n fx_n = y \in C.$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja f sledi

$$\lim_n fgx_n = \lim_n ffx_n = fy \in C.$$

Iz (2.110) dobijamo

$$\begin{aligned} d(gfx_n, fy) &\le d(gfx_n, fgx_n) + d(fgx_n, fy) \\ &\le d(fx_n, gx_n) + d(fgx_n, fy) \to 0,\ n \to \infty, \end{aligned} \tag{2.116}$$

te je

$$\lim_n gfx_n = f(y). \tag{2.117}$$

Sada, na osnovu (2.116) i (2.117) dobijamo

$$M(fx_n, y) \to d(fy, gy), \quad n \to \infty,$$

i

$$d(fy, gy) \le \lambda\, d(fty, gy).$$

Prema tome, iz $0 \le \lambda < 1$ sledi

$$fy = gy. \tag{2.118}$$

Dokažimo da je gy zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g. Iz (2.118) i (2.110) sledi

$$fgy = gfy = ggy. \tag{2.119}$$

Na osnovu (2.108), (2.118) i (2.119) imamo

$$d(ggy, gy) \le \lambda\, M(gy, y) = \lambda\, d(ggy, gy),$$

odnosno $ggy = gy$. Iz (2.119) sledi gy je i fiksna tačka preslikavanja f. Jedinstvenost zajedničke fiksne tačke neposredno sledi iz (2.108). $\square$

Primetimo da ako u Teoremi 2.13.2, uzmemo $f = I_X$, gde je $I_X : X \mapsto X$ identičko preslikavanje, dobija se Teorema 2.13.1.

Ako f nije neprekidno preslikavanje, ali je za neko $m \in \mathbb{N}$ preslikavanje f^m neprekidno, tada imamo sledeći rezultat.

Teorema 2.13.3 *Neka je X Banachov prostor, C neprazan zatvoren podskup od X, i ∂C rub od C. Neka su data preslikavanja $g : C \mapsto X,\ f : X \mapsto X$ i $f : C \mapsto C$. Pretpostavimo da je f^m neprekidno preslikavanje za neko $m \in \mathbb{N}$,* *da f i g zadovoljavaju uslove (2.108), (2.111), (2.112), (2.113) i da f i g komutiraju na C. tj.,*

$$fgx = gfx, \text{ za svako } x \in C. \tag{2.120}$$

Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u C.

Dokaz: Neka su $\{x_n\}$, $\{gx_n\}$ i $\{fx_n\}$ nizovi iz dokaza Teoreme 2.13.2. Zato je

$$\lim_n gx_n = \lim_n fx_n = y \in C.$$

Iz (2.109), za $n \geq 1$, imamo

$$\begin{aligned} d(f^m gx_n, gf^{m-1}y) &= d(gf^m x_n, gf^{m-1}y) \\ &\leq \lambda M(f^m x_n, f^{m-1}y) \\ &= \lambda \max\{d(f^m fx_n, f^m y), d(f^m fx_n, f^m gx_n), \\ &\qquad d(f^m y, gf^{m-1}y), d(f^m fx_n, gf^{m-1}y), d(f^m y, f^m gx_n)\}. \end{aligned}$$

Sada, zbog neprekidnosti preslikavanja f^m, sledi

$$d(f^m y, gf^{m-1}y) \leq \lambda\, d(f^m y, gf^{m-1}y),$$

odnosno $f^m y = gf^{m-1}y$. Prema tome, $f^m y$ je zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g (videti (2.118) i (2.119)). Jedinstvenost zajedničke fiksne tačke neposredno sledi iz (2.108). □

Primetimo da ako u Teoremi 2.13.3, uzmemo $f = I_X$, gde je $I_X : X \mapsto X$ identičko preslikavanje, dobija se Teorema 2.13.1.

Sledeći rezultat je povezan sa Teoremom 2.2 iz rada [41] i Teoremom 2.13.2.

Teorema 2.13.4 *Neka je X Banachov prostor, C neprazan kompaktan podskup u X, i ∂C rub skupa C. Neka su data preslikavanja $g : C \mapsto X$, $f : X \mapsto X$ i $f : C \mapsto C$. Pretpostavimo da su f i g neprekidna preslikavanja, i pretpostavimo da f i g zadovoljavaju uslove (2.110), (2.111), (2.112), (2.113) i neka je za svako $x, y \in C$, $x \neq y$,*

$$d(gx, gy) < M(x, y), \tag{2.121}$$

gde je

$$M(x,y) = \max\Big\{d(fx,fy), d(fx,gx), d(fx,gy), d(fy,gy), d(fy,gx)\Big\}.$$

Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz: Ako su $x, y \in X$ zajedničke fiksne tačke prelikavanja f i g, tada (2.121) implicira $x = y$. Pretpostavimo da f i g nemaju zajedničku fiksnu tačku u C. Tada je $d(fx, gx) > 0$ za svako $x \in C$. Ako je $d(fx, gx) = 0$ za neko $x \in X$, tada je $fx = gx$, $x \neq gx$ i

$$\begin{aligned} M(gx,x) &= \max\Big\{d(fgx,fx), d(fgx,ggx), d(fgx,gx), d(fx,gx), d(fx,ggx)\Big\} \\ &= d(fgx,fx) \leq d(fgx,gfx) + d(gfx,fx) \leq d(ggx,gx). \end{aligned}$$

Ovoje u kontradikciji sa (2.121).

Prema tome, $M(x, y) > 0$ za svako $x, y \in C$. Neka je $Q : C \times C \mapsto [0, 1)$ preslikavanja definisano sa

$$Q(x,y) = \frac{d(gx,gy)}{M(x,y)},\ x,y \in C.$$

Očigledno, Q je neprekidno preslikavanje i $Q(x, y) < 1$, $x, y \in C$. Sada, zato što je C kompaktan skup, postoje $x_0, y_0 \in C$ tako da je

$$\sup\{Q(x,y) : x,y \in C\} = Q(x_0,y_0) < 1.$$

Prema tome, ispunjen je uslov (2.108), i na osnovu Teoreme 2.13.2, f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku na C. To je u kontradikciji sa našom pretpostavkom da f i g nemaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku. $\square$

Ponovo, ako u Teoremi 2.13.4, uzmemo $f = I_X$, gde je $I_X : X \mapsto X$ identičko preslikavanje, dobijamo Teoremu 2.2 rada [41].

Dokaz Teoreme 2.13.2 nam dozvoljava da izvedemo neke rezultate K.M. Dasa i K.V. Naika [46] i Jungcka [81].

Teorema 2.13.5 *(K.M. Das, K.V. Naik [46]) Neka je X kompletan metrički prostor, $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje i $g : X \mapsto X$ preslikavanje koje komutira sa f. Neka f i g zadovoljavaju uslov*

$$g(X) \subset f(X) \tag{2.122}$$

i neka postoji konstanta $\lambda \in (0,1)$ *tako da je za svako* $x, y \in X$

$$d(gx, gy) \leq \lambda \cdot M(x, y),$$

gde je

$$M(x,y) = \max\Big\{d(fx,fy), d(fx,gx), d(fx,gy), d(fy,gy), d(fy,gx)\Big\}.$$

Tada f *i* g *imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Dokaz: Pratimo dokaz Teoreme 2.13.2. Primetimo da uslov (2.122) povlači da polazeći od proizvoljnog $x_0 \in X$ možemo konstruisati niz $\{x_n\}$ tačaka iz X takvih da je $f(x_{n+1}) = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ostatak dokaza sledi iz dokaza Teoreme 2.13.2. □

Sada, na osnovu dokaza Teoreme 2.13.2 možemo pokazati glavni rezultat K.M. Dasa i K.V. Naika.

Teorema 2.13.6 *(K.M. Das, K.V. Naik [46]) Neka je* X *kompletan metrički prostor,* $f^2 : X \mapsto X$ *neprekidno preslikavanje a* $g : f(X) \mapsto X$*. Neka* f *i* g *zadovoljavaju uslov*

$$gf(X) \subset f^2(X) \tag{2.123}$$

i $f(g(x)) = g(f(x))$ *kad god su obe strane definisane. Dalje, neka postoji konstanta* $\lambda \in (0,1)$ *takva da je za svako* $x, y \in f(X)$

$$d(gx, gy) \leq \lambda \cdot M(x, y),$$

gde je

$$M(x,y) = \max\Big\{d(fx,fy), d(fx,gx), d(fx,gy), d(fy,gy), d(fy,gx)\Big\}.$$

Tada f *i* g *imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Dokaz: Ponovo, sledimo dokaz Teoreme 2.13.2. Na osnovu (2.123), polazeći od proizvoljne tačke $x_0 \in f(X)$, možemo konstruisati niz $\{x_n\}$ tačaka iz $f(X)$ tako da je $f(x_{n+1}) = g(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Sada je

$$f(y_{n+1}) = f(g(x_n)) = g(f(x_n)) = g(y_{n-1}) = z_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Na osnovu (2.118) zaključujemo da je $\{z_n\}$ Cauchyev niz u X, te konvergira ka nekoj tački $z \in X$. Dalje, kao u dokazu Teoreme 3.1 rada [46] ili kao u dokazu

Teoreme 2.13.2, $m = 2$, zaključujemo da je $f^2z = gfz$, te je gfz jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g. $\Box$

Primetimo, da na osnovu Teoreme 2.13.2 i dokaza Teoreme 2.13.5 dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.13.7 *Neka je X kompletan metrički prostor. Neka je $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje, a $g : X \mapsto X$ preslikavanje koje slabo komutira sa f. Dalje, neka f i g zadovoljavaju uslove (2.108) i (2.122). Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Sada kao posledicu dobijamo sledeći rezultat Jungcka.

Posledica 2.13.1 *(Jungck [81]) Neka je X kompletan metrički prostor. Neka je $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje, a $g : X \mapsto X$ preslikavanje koje komutira sa f. Ako f i g zadovoljavaju uslov (2.122) i ako postoji konstanta $\lambda \in (0,1)$ tako da je za svako $x, y \in X$,*

$$d(gx, gy) \leq \lambda \cdot d(fx, fy),$$

tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

2.14 Fisherova kvazi-kontrakcija

Fisher [54] je 1979. godine uopštio pojedine rezultate Ćirića vezane za kvazi-kontrakciju, tako što je izučavao opštija preslikavanja.

Definicija 2.14.1 *(Fisher [54]) Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$, je Fisherova kvazi-kontrakcija ako postoji realan broj λ, $0 < \lambda < 1$, i $p, q \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$d(f^p x, f^q y) \leq \lambda \cdot \max\Big\{ d(f^r x, f^s y), d(f^r x, f^{r'} x), d(f^s y, f^{s'} y) : 0 \leq r, r' \leq p,\ 0 \leq s, s' \leq q \Big\} \tag{2.124}$$

za svako $x, y \in X$.

U ovom poglavlju izlažemo rezultate Fishera iz pomenutog rada [54].

Teorema 2.14.1 *Neka je $f : X \mapsto X$ Fisherova kvazi-kontrakcija na kompletnom metričkom prostoru (X, d), i neka je f neprekidno preslikavanje. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$.*

Dokaz: Dovoljno je pretpostaviti da je $1/2 \leq \lambda < 1$ i da je $p \geq q$. Tada važi nejednakost (2.124), a osim toga, $\lambda/(1-\lambda) \geq 1$.

Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka, i dokažimo da je niz $(f^n x)$ ograničen. Ako to nije tačno, tada niz $\{d(f^n x, f^q x) : n = 1, 2, \ldots\}$ nije ograničen. Zato postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$d(f^n x, f^q x) > \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \max\Big\{d(f^i x, f^q x) : 0 \leq i \leq p\Big\}. \tag{2.125}$$

Neka je n najmanji prirodan broj za koji (2.125) važi. Tada, iz $\lambda/(1-\lambda) \geq 1$, sledi $n > p \geq q$. Prema tome,

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^q x) &> \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \max\{d(f^i, f^q x) : 0 \leq i \leq p\} \\ &\geq \max\{d(f^r x, f^q x) : 0 \leq r < n\}. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Iz (2.126) sledi

$$\begin{aligned} (1-\lambda) d(f^n x, f^q x) &> \lambda \cdot \max\{d(f^i, f^q x) : 0 \leq i \leq p\} \\ &\geq \lambda \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) - d(T^r x, T^q x) : \\ &\qquad\qquad 0 \leq i \leq p,\ 0 \leq r < n\} \\ &\geq \lambda \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) - d(f^n x, f^q x) : \\ &\qquad\qquad 0 \leq i \leq p,\ 0 \leq r < n\} \end{aligned}$$

Zato je,

$$d(f^n x, f^q x) > \lambda \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) : 0 \leq i \leq p,\ 0 \leq r < n\}. \tag{2.127}$$

Dokažimo sada da je

$$d(f^n x, f^q x) > \lambda \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) : 0 \leq i, r < n\}. \tag{2.128}$$

Neka je

$$d(f^n x, f^q x) \leq \lambda \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) : 0 \leq i, r < n\}.$$

Tada, koristeći nejednakost (2.127) imamo

$$d(f^n x, f^q x) \leq \lambda \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) : p < i, r < n\}. \tag{2.129}$$

Na osnovu (2.124), (2.129), i (2.127), sledi

$$d(f^n x, f^q x) \leq \lambda^k \cdot \max\{d(f^i x, f^r x) : p < i, r < n\}$$

za $k = 1, 2, \ldots$. Kad uzmemo da $k \to \infty$ dobijamo $d(f^n x, f^q x) = 0$, što je kontradikcija. Prema tome, nejednakost (2.128) je tačna.

Sa druge strane, korišteći nejednakost (2.124), imamo

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^q x) &\leq \lambda \cdot \Big\{ d(f^r x, f^s x), d(f^r x, f^{r'} x), d(f^s x, f^{s'} x) : \\ &\qquad\qquad n - p \leq r, r' \leq n,\ 0 \leq s, s' \leq q \Big\} \\ &\leq \lambda \cdot \max\{d(f^r x, f^s x) : 0 \leq r, s \leq n\}, \end{aligned}$$

što je nemoguće zbog nejednakosti (2.128). Na osnovu dobijene kontradikcije sledi $(f^n x)$ je ograničen niz.

Neka je

$$M = \sup\{d(f^r x, f^s x) :\ r, s = 0, 1, 2, \ldots\} < \infty.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\lambda^{n_0} M < \varepsilon$. Prema tome, za $m, n \geq n_0 \cdot \max\{p, q\}$, i koristeći nejednakosti (2.124) n_0 puta, dobijamo $d(f^m x, f^n x) \leq \lambda^{n_0} M < \varepsilon$. Sledi, $(f^n x)$ je Cauchyev niz u kompletnom metričkom prostoru X. Zato je on konvergentan niz, tj., postoji $u \in X$ tako da je $\lim_n f^n x = u$. Kako je preslikavanje f neprekidno, sledi $fu = u$, odnosno u je fiksna tačka preslikavanja f. Jedinstvenost sledi trivijalno iz (2.124). $\square$

U specijalnom slučaju Teoreme 2.14.1, kada je $q = 1$ ili $p = 1$, uslov da je f neprekidno preslikavanje nije potreban. To pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2.14.2 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $0 \leq \lambda < 1$, $p \in \mathbb{N}$ i $f : X \mapsto X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$\begin{aligned} d(f^p x, fy) \leq \lambda \cdot \max \Big\{ & d(f^r x, f^s y), d(f^r x, f^{r'} x), d(y, fy) : \\ & \qquad 0 \leq r, r' \leq p,\ s = 0, 1 \Big\} \end{aligned}$$

za svako $x, y \in X$. Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz: Neka je $x \in X$. Iz dokaza Teoreme 2.14.1, sledi $(f^n x)$ je Cauchyev niz, i postoji $\lim_n f^n x = u \in X$. Za $n \geq p$, imamo

$$d(f^n x, fu) \leq \lambda \cdot \max\{d(f^r x, f^s u), d(f^r x, f^{r'} x), d(u, fu) : \\ n - p \leq r, r' \leq n,\ s = 0, 1\},$$

a kad $n \to \infty$ sledi

$$d(u, fu) \leq \lambda \cdot \max\{d(u, f^s u) : s = 0, 1\} = \lambda \cdot d(u, fu).$$

Prema tome, u je fiksna tačka preslikavanja f. $\square$

Neposredno se dobija sledeća posledica.

Posledica 2.14.1 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $0 \leq \lambda < 1$ i $f : X \mapsto X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$d(fx, fy) \leq \lambda \cdot \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\},$$

za svako $x, y \in X$. Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku u X.

Sada ćemo pokazati da je neprekidnosti preslikavanja f u slučaju $p, q \geq 2$ potreban uslov u Teoremi 2.14.1.

Primer 2.14.1 *Neka je $X = [0, 1]$, sa uobičajenom metrikom. Dakle, X je kompletan prostor. Definišimo preslikavanje $f : X \mapsto X$ na sledeći način*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0, \\ \frac{1}{2}x & , x \neq 0. \end{cases}$$

Očigledno, f nije neprekidno preslikavanje. Za $p, q \geq 2$, i svako $x, y \in X$,

$$d(f^p x, f^q y) = \frac{1}{2} d(f^{p-1} x, f^{q-1} y),$$

te je f kvazi-kontrakcija sa konstantom $\lambda = \frac{1}{2}$. Međutim, preslikavanje f nema fiksnu tačku.

Sledeća teorema se odnosi na kompaktne metričke prostore.

Teorema 2.14.3 *Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$d(f^p x, f^q y) < \max\Big\{d(f^r x, f^s y), d(f^r x, f^{r'} x), d(f^s y, f^{s'} y) : 0 \le r, r' \le p,\ 0 \le s, s' \le q\Big\},$$

za svako $x, y \in X$ za koje je desna strana nejednakosti pozitivna. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku u X.

Dokaz: Pretpostavimo da je f Fisherova kvazi-kontrakcija. Tada dokaz sledi na osnovu Teoreme 2.14.1.

Ako f nije Fisherovakvazi-kontrakcija, tada postoji (λ_n) monotono rastući niz koji konvergira ka 1, i nizovi (x_n) i (y_n) u X tako da je

$$d(f^p x_n, f^q y_n) > \lambda_n \cdot \max\Big\{d(f^r x_n, f^s y_n), d(f^r x_n, f^{r'} x_n), d(f^s y_n, f^{s'} y_n) : 0 \le r, r' \le p,\ 0 \le s, s' \le q\Big\},$$

za $n = 1, 2, \dots$. Kako je X kompaktan prostor, postoje podnizovi (x_{n_k}) i (y_{n_k}) nizova (x_n) i (y_n) koji konvergiraju ka x i y, respektivno. Tada je

$$d(f^p x_{n_k}, f^q y_{n_k}) > \lambda_{n_k} \cdot \max\Big\{d(f^r x_{n_k}, f^s y_{n_k}), d(f^r x_{n_k}, f^{r'} x_{n_k}), d(f^s y_{n_k}, f^{s'} y_{n_k}) : 0 \le r, r' \le p,\ 0 \le s, s' \le q\Big\},$$

za $k = 1, 2, \dots$. Kad uzmemo da $k \to \infty$, na osnovu neprekidnosti preslikavanja f, sledi

$$d(f^p x, f^q y) \ge \max\{d(f^r x, f^s y), d(f^r x, f^{r'} x), d(f^s y, f^{s'} y) : 0 \le r, r' \le p,\ 0 \le s, s' \le q\}.$$

Ovo je kontradikcija, sem u slučaju da je $x = y = fx$. Prema tome, x je fiksna tačka preslikavanja f. Jedinstvenost fiksne tačke se lako dokazuje. $\square$

U slučaju $p = q = 1$, važi sledeća posledica

Posledica 2.14.2 *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$d(fx, fy) < \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\},$$

za svako $x, y \in X$, za koje je desna strana nejednakosti pozitivna. Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

2.15 Caristieva teorema

Postoje razna proširenja Banachovog principa kontrakcije, a proširenje koje je uveo Caristi [27], 1976. godine jedno je od najviše proučavanih. Caristieva teorema [27] može se motivisati sledećim razmatranjem: Ako je (X, d) metrički prostor, i $T : X \mapsto X$, kontrakcija sa Lipschzovom konstantom $k \in (0, 1)$, tada je

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &= \frac{1}{1-k} \cdot d(x, T(x)) - \frac{k}{1-k} \cdot d(x, T(x)) \\ &\leq \frac{1}{1-k} \cdot d(x, T(x)) - \frac{1}{1-k} \cdot d(T(x), T(T(x))) \\ &= \phi(x) - \phi(T(x)), \end{aligned}$$

za svako $x \in X$, gde je $\phi(x) = (1-k)^{-1} d(x, T(x))$.

Poznato je da je Caristieva teorema (ili Caristi-Kirkova ili Caristi-Kirk-Browderova teorema) ekvivalentna sa Ekelandovim variacionim principom [50], što je veoma važno zbog primena teoreme. Originalan dokaz Caristi-Kirkove teoreme je dosta komplikovan, a u literaturi postoje nekoliko različitih dokaza pomenute teoreme.

Napomenimo da je preslikavanje $\varphi : X \mapsto \mathbb{E}, \mathbb{E} \subset R$, odozdo poluneprekidno u $x \in X$ ako za svaki niz $\{x_n\}$ iz $\lim_n x_n = x$ sledi $\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n)$. Preslikavanje $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ odozdo poluneprekidno na X ako je odozdo poluneprekidno u $x \in X$ za svako $x \in X$.

Teorema 2.15.1 *(Caristi [27]) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $T : X \mapsto X$, $\phi : X \mapsto [0, \infty)$ odozdo poluneprekidno preslikavanje, tako da je*

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)), \quad x \in X. \tag{2.130}$$

Tada funkcija T ima fiksnu tačku.

Dokaz: (Ćirić [43]) Za svako $x \in X$ neka je

$$P(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y)\},$$
$$\alpha(x) = \inf \{\phi(y) : y \in P(x)\}.$$

Zato što $x \in P(x)$, $P(x)$ je neprazan skup i $0 \leq \alpha(x) \leq \phi(x)$.

Neka je $x \in X$. Definišimo niz $\{x_n\}$ iz X tako da je $x_1 = x$, a ukoliko je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ određeno, odredimo $x_{n+1} \in P(x_n)$ tako da je $\phi(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + 1/n$. Prema tome, niz $\{x_n\}$ ispunjava sledeće uslove:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \phi(x_n) - \phi(x_{n+1}); \tag{2.131}$$
$$\alpha(x_n) \leq \phi(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + 1/n. \tag{2.132}$$

Kako je $\{\phi(x_n)\}$ opadajući niz realnih brojeva, postoji $\alpha \geq 0$ tako da je

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha(x_n). \tag{2.133}$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Iz (2.133) sledi postoji N_k tako da je $\phi(x_n) < \alpha + 1/k$ za svako $n \geq N_k$. Prema tome, iz monotonosti niza $\{\phi(x_n)\}$, za $m \geq n \geq N_k$ sledi $\alpha \leq \phi(x_m) \leq \phi(x_n) < \alpha + 1/k$, odnosno

$$\phi(x_n) - \phi(x_m) < 1/k \quad \text{za svako} \quad m \geq n \geq N_k. \tag{2.134}$$

Koristeći nejednakost trougla i nejednakost (2.131) imamo

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{s=n}^{m-1} d(x_s, x_{s+1}) \leq \phi(x_n) - \phi(x_m). \tag{2.135}$$

Sada iz (2.134) sledi

$$d(x_n, x_m) < 1/k \quad \text{za svako} \quad m \geq n \geq N_k.$$

Prema tome, $\{x_n\}$ je Cauchyev niz, a zato što je X kompletan metrički prostor, on konvergira ka nekom $u \in X$.

Kako je ϕ odozdo poluneprekidna funkcija, iz (2.135) imamo

$$\begin{aligned}\phi(u) &\leq \lim_{m\to\infty} \inf \phi(x_m)\\ &\leq \lim_{m\to\infty} \inf[\phi(x_n) - d(x_n, x_m)]\\ &= \phi(x_n) - d(x_n, u),\end{aligned}$$

odnosno

$$d(x_n, u) \leq \phi(x_n) - \phi(u).$$

Prema tome $u \in P(x_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, i $\alpha(x_n) \leq \phi(u)$. Sada iz (2.133) sledi $\alpha \leq \phi(u)$. Sa druge strane, zato što je ϕ odozdo poluneprekidno preslikavanje iz (2.133) sledi $\phi(u) \leq \lim_n \inf \phi(x_n) = \alpha$. Prema tome, $\phi(u) = \alpha$.

Kako je $u \in P(x_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, iz (2.130), sledi $Tu \in P(u)$, odnosno

$$\begin{aligned} d(x_n, Tu) &\leq d(x_n, u) + d(u, Tu) \\ &\leq \phi(x_n) - \phi(u) + \phi(u) - \phi(Tu) \\ &= \phi(x_n) - \phi(Tu). \end{aligned}$$

Prema tome, $Tu \in P(x_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Sledi

$$\phi(Tu) \geq \alpha(x_n) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sada, iz (2.133) sledi

$$\phi(Tu) \geq \alpha.$$

Kako je iz (2.130), $\phi(Tu) \leq \phi(u)$, i $\phi(u) = \alpha$, imamo

$$\phi(u) = \alpha \leq \phi(Tu) \leq \phi(u).$$

Prema tome, $\phi(Tu) = \phi(u)$. Sada iz (2.130) sledi

$$d(u, Tu) \leq \phi(u) - \phi(Tu) = 0,$$

odnosno $Tu = u$. □

Teorema 2.15.2 *(Ekeland [50], 1972). Neka je $\phi : X \to R$ odozdo poluneprekidna funkcija na kompletnom metričkom prostoru (X, d). Ako je ϕ odozdo ograničena funkcija, tada postoji $u \in X$ tako da je*

$$\phi(u) < \phi(x) + d(u, x) \quad za \quad x \in X, \quad x \neq u. \tag{2.136}$$

Dokaz: (Ćirić [43]) Pokazaćemo da je tačka u, dobijena u dokazu Teoreme 2.15.1, tražena tačka. Koristeći iste oznake, za $x \neq u$ treba da pokažemo

$x \notin P(u)$. Pretpostavimo suprotno, tj., da za neko $v \neq u$ imamo $v \in P(u)$. Tada iz $0 < d(u,v) \leq \phi(u) - \phi(v)$ sledi $\phi(v) < \phi(u) = \alpha$.

Kako je

$$\begin{aligned} d(x_n, v) &\leq d(x_n, u) + d(u, v) \\ &\leq \phi(x_n) - \phi(u) + \phi(u) - \phi(v) \\ &= \phi(x_n) - \phi(v), \end{aligned}$$

sledi $v \in P(x_n)$. Prema tome

$$\alpha(x_n) \leq \phi(v) \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kad uzmemo da $n \to \infty$, imamo

$$\alpha \leq \phi(v),$$

što je kontrtadikcija sa $\phi(v) < \alpha = \phi(u)$. Prema tome, za svako $x \in X$, $x \neq u$ sledi $x \notin P(u)$, odnosno

$$x \neq u \Rightarrow d(u,x) > \phi(u) - \phi(x). \quad \square$$

Dokaz: (Brézis i Browder [23].)

Na osnovu Teoreme 2.15.2 postoji $u \in X$ stako da je ispunjen uslov (2.136). Sledi $Tu = u$, jer ako je $Tu \neq u$, sledi $\phi(Tu) - \phi(u) > -d(u, Tu)$, što je kontradikcija sa (2.130).

Primetimo da se Teorema 2.15.2 može dobiti na osnovu Teoreme 2.15.1. Zaista, ako pretpostavimo da zaključak Teoreme 2.15.2 nije tačan, tada za svako $x \in X$ postoji $y \in X$, $y \neq x$ tako da je $\phi(y) - \phi(x) \leq -d(x,y)$. Prema tome možemo definisati preslikavanje $T : X \mapsto X$ koje zadovoljava uslov (2.130) a nema fiksnu tačku. $\square$

Izložićemo dokaz Caristieve teoreme koji su dali Kirk i Saliga [95]. Prvo dokažimo rezultat Brézis i Browdera [23], dobro poznati Brézis – Browderov [23] princip uredjenja.

Neka je $(X, \leq)$, parcijalno uredjen skup. Za $x \in X$ označimo sa $S(x) = \{y \in X : x \leq y\}$. Kaže se da je niz $x_n \in X$ rastući ako je $x_n \leq x_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.15.3 *(Brézis i Browder [23]). Neka funkcija $\phi : X \mapsto \mathbb{R}$ zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \leq \phi(y)$;

(2) za svaki rastući niz $x_n \in X$ tako da je $\phi(x_n) \leq C < \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji $y \in X$ tako da je $x_n \leq y$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

(3) za svako $x \in X$ postoji $u \in X$ tako da je $x \leq u$ i $\phi(x) < \phi(u)$.

Tada je za svako $x \in X$, $\phi(S(x))$ neograničen skup.

Dokaz: Za $a \in X$ neka je

$$\rho(a) = \sup_{b \in S(a)} \phi(b).$$

Dokazaćemo da je $\rho(x) = +\infty$ za svako $x \in X$. Pretpostavimo da je $\rho(x) < \infty$ za neko $x \in X$. Koristeći indukciju, definišimo niz x_n tako da je $x_1 = x$, $x_{n+1} \in S(x_n)$ i $p(x_n) \leq \phi(x_{n+1}) + (1/n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\phi(x_{n+1}) \leq p(x) < \infty$, iz (2) sledi postoji $y \in X$ tako da je $x_n \leq y$ za svako n. Iz (3) postoji $u \in X$ tako da je $y \leq u$ i $\phi(y) < \phi(u)$. Kako je $x_n \leq u$ imamo $\phi(u) \leq p(x_n)$ za svako n. Osim toga, imamo $x_{n+1} \leq y$, te je $\phi(x_{n+1}) \leq \phi(y)$. Prema tome

$$\phi(u) \leq p(x_n) \leq \phi(x_{n+1}) + (1/n) \leq \phi(y) + (1/n), \quad n \in \mathbb{N},$$

odnosno $\phi(u) \leq \phi(y)$, što je kontradikcija. $\square$

Teorema 2.15.4 *Neka je $(X, \preceq)$ parcijalno uređen skup, $x \in X$ i $S(x) = \{y \in X : x \preceq y\}$. Pretpostavimo da preslikavanje $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ zadovoljava sledeće uslove:*

(a) $x \preceq y$ i $x \neq y \Rightarrow \psi(x) < \psi(y)$;

(b) za svaki rastući niz $\{x_n\}$ iz X, za koji je $\psi(x_n) \leq C < \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji $y \in X$ tako da je $x_n \preceq y$ za svako $n \in \mathbb{N}$;

(c) za svako $x \in X$, skup $\psi(S(x))$ je ograničen odozgo.

Tada, za svako $x \in X$ postoji $x' \in S(x)$ tako da je x' maksimalan u X, tj., tako da je $\{x'\} = S(x')$.

Dokaz: Primenom Teoreme 2.15.3 na $X = S(x)$; kako su ispunjeni uslovi (1) i (2) Teoreme 2.15.3, a zaključak teoreme ne važi, sledi da uslov (3) nije ispunjen za neko $x' \in S(x)$. Prema tome, imamo $S(x') = \{x'\}$. $\square$

Napomenimo da je preslikavanje $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ odozdo poluneprekidno odozgo ako iz $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim x_n = x$ i $\{\varphi(x_n)\} \downarrow r$ sledi $\varphi(x) \leq r$.

Teorema 2.15.5 *(Kirk i Saliga [95]) Pretpostavimo da je (X, d) kompletan metrički prostor, i pretpostavimo da je $T : X \mapsto X$ proizvoljno preslikavanje koje za svako $x \in X$ zadovoljava uslov*

$$d(x, T(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(T(x)), \tag{2.137}$$

gde je preslikavanje $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ ograničeno odozgo i poluneprekidno odozgo. Tada preslikavanje T ima fiksnu tačku u X.

Dokaz: Uvedimo Brøndstedovo parcijalno uređenje $\preceq$ u X na sledeći način: Za $x, y \in X$ imamo

$$x \preceq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y),$$

i neka je $\psi = -\varphi$. Tada je uslov (a) iz Teoreme 2.15.4 ispunjen, a uslov (c) sledi iz činjenice da je preslikavanje φ ograničeno odozdo. Da bismo pokazali uslov (b), pretpostavimo da je $\{x_n\}$ rastući niz u $(X, \preceq)$ tako da je $\psi(x_n) \leq C < \infty$ za svako n. Tada je $\{\varphi(x_n)\}$ opadajući niz u $\mathbb{R}$, i postoji $r \in \mathbb{R}$ tako da je $\lim_n \varphi(x_n) = r$. Kako je $\{\varphi(x_n)\}$ opadajući niz, za svako $m > n$ je

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \lim_{n,m\to\infty} [\varphi(x_n) - \varphi(x_m)] = 0.$$

Prema tome, $\{x_n\}$ je Cauchyev niz u X. Sledi postoji $x \in X$ tako da je $\lim_n x_n = x$. Iz $\varphi(x_n) \downarrow r$, $\varphi(x) \leq r$, sledi

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \lim_m d(x_n, x_m) \leq \lim_m [\varphi(x_n) - \varphi(x_m)] \\ &= \varphi(x_n) - r \leq \varphi(x_n) - \varphi(x). \end{aligned}$$

Prema tome, x je gornja granica za $\{x_n\}$ u $(X, \preceq)$, a samim tim je dokazan uslov (b). Na osnovu Teoreme 2.15.4 sada sledi da $(X, \preceq)$ ima maksimalni element x'. Kako iz uslova (2.137) sledi $x' \preceq T(x')$, imamo $T(x') = x'$. $\square$

Siegel [135] je 1977. godine dokazao na originalan način uopštenu verziju Caristieve teoreme. Do kraja ove sekcije izlažemo rezultate iz pomenutog rada [135].

Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Neka je $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ (sa $\mathbb{R}^+$ označavamo skup nenegativnih brojeva) i $g : X \mapsto X$ ne obavezno neprekidno preslikavanje, tako da je $d(x, gx) \leq \phi(x) - \phi(gx)$, $x \in X$.

Ako je dat niz funkcija f_i, $i \leq 1 < \infty$, označimo sa

$$\prod_{i=1}^{\infty} f_i x = \lim_{i\to\infty} f_i\, f_{i-1} \cdots f_1 x,$$

ako ova granična vrednost postoji, i nazovimo je prebrojiva kompozicija datog niza funkcija.

Definicija 2.15.1 *Neka je* $\Phi = \{f : f : X \mapsto X \ i \ d(x, fx) \leq \phi(x) - \phi(fx)\}$. *Označimo sa* $\Phi_g = \{f : f \in \Phi \ i \ \phi(f) \leq \phi(g)\}$.

Lema 2.15.1 *Neka je ϕ odozdo poluneprekidna funkcija, i $\{x_i\}$ niz u X tako da je $d(x_i, x_{i+1}) \leq \phi(x_i) - \phi(x_{i+1})$ za svako i. Tada, postoji $\overline{x} \in X$ tako da je $\overline{x} = \lim_{i\to\infty} x_i$ i $d(x_i, \overline{x}) \leq \phi(x_i) - \phi(\overline{x})$ i za svako i.*

Dokaz: Kako je niz $\{\phi(x_i)\}_i$ nerastući i odozdo ograničen (brojem nula), a pritom važi $d(x_i, x_j) \leq \phi(x_i) - \phi(x_j)$ za $i \leq j$, niz $\{x_i\}$ je Cauchyev u X. Neka je $\overline{x} = \lim x_i$. Zato što je ϕ odozdo poluneprekidna funkcija sledi

$$d(x_i, \overline{x}) = \lim_{j\to\infty} d(x_i, x_j) \leq \phi(x_i) - \lim_{j\to\infty} \phi(x_j) \leq \phi(x_i) - \phi(\overline{x}). \quad \Box$$

Lema 2.15.2 *Skupovi Φ i Φ_g su zatvoreni u odnosu na kompoziciju funkcija, a ako je ϕ odozdo poluneprekidno preslikavanje, tada su skupovi Φ i Φ_g zatvoreni u odnosu na prebrojive kompozicije nizova funkcija.*

Dokaz: Dokažimo da su skuppovi Φ i Φ_g zatvoreni u odnosu na kompoziciju funkcija. Ako je $f_1, f_2 \in \Phi$, tada je

$$\begin{aligned} d(x, f_2 f_1 x) &\leq d(x, f_1 x) + d(f_1 x, f_2 f_1 x) \\ &\leq (\phi(x) - \phi(f_1 x)) + (\phi(f_1 x) - \phi(f_2 f_1 x)) \\ &= \phi(x) - \phi(f_2 f_1 x). \end{aligned}$$

Prerma tome, $f_2 f_1 \in \Phi$. Ako je $f_1 \in \Phi_g$ onda iz $\phi(f_1 x) - \phi(f_2 f_1 x) \geq 0$ sledi $\phi(f_2 f_1) \leq \phi_(g)$, odnosno $f_2 f_1 \in \Phi_g$.

Ostatak dokaza sledi iz činjenice da za svako $x \in X$ niz $x_i = f_i f_{i-1} \cdots f_1 x$ zadovoljava uslove Leme 2.15.1. $\Box$

.

Definicija 2.15.2 *Uvedimo sledeće oznake:*

(1) Za $A \subset X$ neka je diametar skupa A, označen sa

$$\delta(A) = \sup_{x_i, x_j \in A} (d(x_i, x_j)).$$

(2) $r(A) = \inf_{x \in A}(\phi(x))$; primetimo da iz $B \subseteq A$ sledi $r(B) \geq r(A)$.

(3) Neka je $\Phi' \subseteq \Phi$. Za svako $x \in X$, neka je $S_x = \{fx : f \in \Phi'\}$.

Lema 2.15.3 $\delta(S_x) \leq 2(\phi(x) - r(S_x))$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} d(f_1 x, f_2 x) &\leq d(x, f_1 x) + d(x, f_2 x) \\ &\leq \phi(x) - \phi(f_1 x) + \phi(x) - \phi(f_2 x) \\ &\leq 2(\phi(x) - r(S_x)). \quad \square \end{aligned}$$

Glavni rezultat Siegela iz rada [135] je sledeća teorema.

Teorema 2.15.6 *(Siegel [135], 1977). Neka su $\Phi' \subseteq \Phi$ skupovi funkcija zatvoreni u odnosu na kompozicije funkcija. Neka je $x_0 \in M$.*

(a) Ako je skup Φ' zatvoren i za prebrojive kompozicije niza funkcija, tada postoji $\overline{f} \in \Phi'$ tako da je $\overline{x} = \overline{f} x_0$ i $g(\overline{x}) = \overline{x}$ za svako $g \in \Phi'$.

(b) Ako su elementi skupa Φ' neprekidne funkcije, tada postoji niz funkcija $f_i \in \Phi'$ i $\overline{x} = \lim_{i \to \infty} f_i f_{i-1} \cdots f_1 x_0$ tako da je $g(\overline{x}) = \overline{x}$ za svako $g \in \Phi'$.

Dokaz: Neka je $\{\varepsilon_i\}$ niz pozitivnih brojeva koji konvergira ka nuli. Postoji $f_1 \in \Phi'$ tako da je $\phi(f_1 x_0) - r(S_{x_0}) < \varepsilon/2$. Neka je $x_1 = f_1(x_0)$. Kako je skup Φ' zatvoren u odnosu na kompoziciju funkcija, sledi $S_{x_1} \subseteq S_{x_0}$ i

$$\delta(S_{x_1}) \leq 2(\phi(x_1) - r(S_{x_1})) \leq 2(\phi(f_1 x_0) - r(S_{x_0})) < \varepsilon_1.$$

Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do niza funkcija f_i tako da je $x_i = f_i(x_{i-1})$, $S_{x_{i+1}} \subseteq S_{x_i}$ i $\delta(S_{x_i}) < \varepsilon_i$.

Iz uslova (a) znamo da postoji $\overline{f} = \prod_{i=1}^{\infty} f_i \in \Phi'$. Neka je $\overline{x} = \overline{f} x_0$. Zato što je $\overline{x} = \prod_{j=i+1}^{\infty} f_j(x_i)$, sledi $\overline{x} \in S_{x_i}$ za svako i. S druge strane, iz $\lim_{i \to \infty} \delta(S_{x_i}) = 0$ sledi $\overline{x} = \cap_{i=0}^{\infty} S_{x_i}$.

Dokažimo da je $g(\overline{x}) = \overline{x}$ za svako $g \in \Phi'$. To sledi iz činjenice da je $g(\overline{x}) \in S_{x_i}$ za svako i, zato što je $g(\overline{x}) = g(\prod_{j=i+1}^{\infty} f_j(x_i))$.

Pod pretpostavkom (b) znamo da postoji $\overline{x} = \lim_{i\to\infty} f_i f_{i-1} \cdots f_1(x_0) = \lim_{i\to\infty} x_i$. Kako je $\{x_j\}_{j>i} \subseteq S_i$ za svako i, sledi $\overline{x} \in \overline{S_i}$, gde je $\overline{S_i}$ zatvorenje skupa S_i. Kako je $\delta(\overline{S_i}) = \delta(S_i)$ sledi $\overline{x} = \cap_{i=0}^{\infty} \overline{S_i}$.

Dokažimo da je $g(\overline{x}) = \overline{x}$ za svako $g \in \Phi'$. Primetimo da je $g(x_i) \in S_{x_i}$ za svako i. Zato što je g neprekidna funkcija, za svako $\varepsilon > 0$ postoji i_0 tako da je

$$\left\{x \in X : d(g(\overline{x}), x) \ < \varepsilon\right\} \bigcap S_{x_i} \neq \phi, \quad i > i_0.$$

Prema tome, ako je $i > i_0$, sledi $d(g(\overline{x}), \overline{x}) < \varepsilon + \varepsilon_i$. Iz $\varepsilon_i \to 0$ sledi $d(g(\overline{x}), \overline{x}) \leq \varepsilon$, a kako je ε proizvoljan broj, imamo $g(\overline{x}) = \overline{x}$. $\square$

Napomena 2.15.1 *U prethodnoj teoremi, u uslovu (b), možemo uzeti da je* $\Phi' = \{g^n\}$*, skup koji se sastoji od neprekidne funkcije* g *i njenih konačnih iteracija. Tada je* $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} g^n(x_0)$ *kao i u Banachovoj teoremi o kontrakciji.*

2.16 Teorema Bollenbacher i Hicksa

U vezi sa Caristievom Teoremom 2.15.1 je sledeći rezultat.

Teorema 2.16.1 *(Eisenfeld i Lakshmikantham [52]). Neka je na metričkom prostoru* X *dato preslikavanje* $f : X \mapsto X$*. Tada postoji preslikavanje* $\phi : X \mapsto [0, \infty)$ *za koje je ispunjen uslov*

$$d(x, fx) \leq \phi(x) - \phi(fx), \quad x \in X, \tag{2.138}$$

ako i samo ako je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(f^n x, f^{n+1} x) \tag{2.139}$$

konvergentan za svako $x \in X$*.*

Dokaz: Pretpostavimo da je ispunjen uslov (2.138). Dokažimo da je red $\sum_{k=0}^{\infty} d(f^k x, f^{k+1} x)$ konvergentan. To sledi iz činjenice da je za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} d(f^k x, f^{k+1} x) = d(x, fx) + \ldots + d(f^{n-1} x, f^n x)$$

$$\leq (\phi(x) - \phi(fx)) + \cdots + (\phi(f^{n-1}x) - \phi(f^n x))$$
$$= \phi(x) - \phi(f^n x)$$
$$\leq \phi(x).$$

Ukoliko je red (2.139) konvergentan za svako $x \in X$, definišimo preslikavanje $\phi : X \mapsto [0, \infty)$ sa

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d(f^k x, f^{k+1}x), \quad x \in X.$$

Očigledno, ovako definisano preslikavanje ϕ ispunjava uslov (2.138). $\square$

Neka je $x \in X$ i $O(x, \infty) = \{x, fx, f^2x, \ldots\}$ orbita elementa x. Preslikavanje $G : X \mapsto [0, \infty)$ je $f-$orbitalno odozdo poluneprekidno u x ako za svaki niz $\{x_n\}$ iz $O(x, \infty)$ iz $\lim_n x_n = u$ sledi $G(u) \leq \liminf G(x_n)$.

Primetimo da ako je uslov (2.138) ispunjen za svako $y \in O(x, \infty)$, tada je red (2.139) konvergentan za pomenuto x, zato što je niz parcijalnih suma neopadajući i ograničen sa $\phi(x)$.

Alberta Bollenbacher i T.L. Hicks [20], dokazali su 1988. godine sledeću veoma interesantnu teoremu, čija posledica uključuje mnoga uopštenja Banachove teoreme o fiksnoj tački. U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz pomenutog rada.

Teorema 2.16.2 *(Bollenbacher i Hicks [20]) Neka su na metričkom prostoru (X, d) data preslikavanja $f : X \mapsto X$ i $\phi : X \mapsto [0, \infty)$. Pretpostavimo da postoji x tako da je*

$$d(y, fy) \leq \phi(y) - \phi(fy) \tag{2.140}$$

za svako $y \in O(x, \infty)$, i da svaki Cauchyev niz iz $O(x, \infty)$ konvergira ka nekoj tački iz X. Tada je:

(1) $\lim_n f^n x = \overline{x}$ *postoji.*

(2) $d(f^n x, \overline{x}) \leq \phi(f^n x)$.

(3) $f\overline{x} = \overline{x}$ *ako i samo ako je* $G(x) = d(x, fx)$ *$f-$orbitalno odozdo poluneprekidna funkcija u* x.

(4) $d(f^n x, x) \leq \phi(x)$ *i* $d(\overline{x}, x) \leq \phi(x)$.

Dokaz: Iz prethodne teoreme sledi red $\sum_{k=0}^{\infty} d(f^k x, f^{k+1}x)$ je konvergentan. Dokažimo da je $\{f^n x\}$ Cauchyev niz. To sledi zato što je za $m > n$,

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^m x) &\leq d(f^n x, f^{n+1}x) + \ldots + d(f^{m-1}x, f^m x) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(f^k x, f^{k+1}x), \end{aligned}$$

i činjenice da je red $\sum_{k=n}^{\infty} d(f^k x, f^{k+1}x)$ konvergentan. Prema tome, postoji $\overline{x} \in X$, tako da je ispunjen uslov (1). Sada, iz

$$\begin{aligned} 0 \leq d(f^n x, f^m x) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(f^k x, f^{k+1}x) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} [\phi(f^k x) - \phi(f^{k+1}x)] = \phi(f^n x) - \phi(f^m x) \leq \phi(f^n x), \end{aligned}$$

kad uzmemo $m \to \infty$, sledi (2).

Da dokažemo (3), pretpostavimo da $x_n = f^n x \to \overline{x}$. Ako je G $f-$orbitalno odozdo poluneprekidna funkcija u x, sledi

$$0 \leq d(\overline{x}, f\overline{x}) = G(\overline{x}) \leq \liminf G(x_n) = \liminf d(f^n x, f^{n+1}x) = 0,$$

odnosno $f\overline{x} = \overline{x}$.

Pretpostavimo sada da je $f\overline{x} = \overline{x}$ i da je $\{x_n\}$ niz iz $O(x, \infty)$ tako da je $\lim x_n = \overline{x}$. Tada je

$$G(\overline{x}) = d(\overline{x}, f\overline{x}) = 0 \leq \liminf d(x_n, fx_n) = \liminf G(x_n),$$

odnosno G je $f-$orbitalno odozdo poluneprekidno funkcija u x.

Uslov (4) sledi iz

$$\begin{aligned} d(x, f^n x) &\leq d(x, fx) + d(fx, f^2x) + \ldots + d(f^{n-1}x, f^n x) \\ &\leq [\phi(x) - \phi(fx)] + [\phi(fx) - \phi(f^2x)] + \ldots + [\phi(f^{n-1}x) - \phi(f^n x)] \\ &= \phi(x) - \phi(f^n x) \leq \phi(x), \end{aligned}$$

i činjenice da kad uzmemo $n \to \infty$, dobijamo $d(x, \overline{x}) \leq \phi(x)$. $\square$

Posledica 2.16.1 *[68] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i $0<k<1$. Pretpostavimo da za $f: X \mapsto X$ postoji x tako da je*

$$d(fy, f^2y) \leq kd(y, fy) \tag{2.141}$$

za svako $y \in O(x,\infty)$. Tada

(1) $\lim_n f^n x = \overline{x}$ *postoji.*

(2) $d(f^n x, \overline{x}) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x, fx)$.

(3) $f\overline{x} = \overline{x}$ *ako i samo ako je* $G(x) = d(x, fx)$ $f-$ *orbitalno odozdo poluneprekidna funkcija u* x.

(4) $d(f^n x, x) \leq (1-k)^{-1} d(x, fx)$ *i* $d(\overline{x}, x) \leq (1-k)^{-1} d(x, fx)$.

Dokaz: Neka je $\phi(y) = (1-k)^{-1} d(y, fy)$, $y \in O(x,\infty)$. Ako u (2.141) uzmemo $y = f^n x$ dobijamo

$$d(f^{n+1}x, f^{n+2}x) \leq kd(f^n x, f^{n+1}x),$$

te je

$$d(f^n x, f^{n+1}x) - kd(f^n x, f^{n+1}x) \leq d(f^n x, f^{n+1}) - d(f^{n+1}x, f^{n+2}x).$$

Prema tome,

$$d(f^n x, f^{n+1}x) \leq \frac{1}{(1-k)} \cdot [d(f^n x, f^{n+1}x) - d(f^{n+1}x, f^{n+2}x)],$$

odnosno

$$d(y, fy) \leq \phi(y) - \phi(fy).$$

Sada, iz Teoreme 2.16.2 uslovi $(1), (3)$ i (4) slede neposredno.

Primetimo da iz (2.141) sledi $d(f^n x, f^{n+1}x) \leq k^n d(x, fx)$, a iz Teoreme 2.16.2 sledi

$$d(f^n x, \overline{x}) \leq \phi(f^n x) = \frac{1}{1-k} \cdot d(f^n x, f^{n+1}x) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x, fx),$$

odnosno uslov (2). $\square$

Napomena 2.16.1 *Napomenimo da nije neophodno da ϕ bude odozdo poluneprekidna funkcija, već je dovoljno da je uslov (2.138) ispunjen samo na $O(x,\infty)$, za neko x. Takođe, može se desiti da se lakše proverava da je G*

odozdo poluneprekidna funkcija nego da se to proveri za funkciju ϕ. Čak i kada je ϕ odozdo poluneprekidna funkcija i ispunjen uslov (2.138) za svako $x \in X$, u Caristievoj teoremi nije neophodno $f\overline{x} = \overline{x}$, već je $fx_0 = x_0$ za neko x_0 iz X.

Primer 2.16.1 *Neka je $X = [0, 1]$, a $\phi(x) = x$, $x \in X$. Definišimo preslikavanje f na sledeći način*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & , x \in (\frac{1}{2}1]. \end{cases}$$

Za $x \in [0, \frac{1}{2}]$, imamo $d(x, fx) = d(x, 0) = x$ i $\phi(x) - \phi(fx) = \phi(x) - 0 = x - 0 = x$. Ako $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, tada je $d(x, fx) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \phi(x) - \phi(fx)$. Prema tome, $d(x, fx) = \phi(x) - \phi(fx)$, $x \in X$. Primetimo da je 0 jedina fiksna tačka preslikavanja f. Ako je $x > \frac{1}{2}$, tada je $\lim f^n x = \frac{1}{2} \neq f(\frac{1}{2}) = 0$.

Primer 2.16.2 *Neka je $X = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, d uobičajena metrika na X, i $f(x, y) = (x, 0)$, $(x, y) \in X$. Tada je $f(f(p)) = fp$ za svako $p \in X$, i $0 = d(fp, f^2p) \leq \frac{1}{2}d(p, fp)$. Kao u Posledici 2.16.1, neka je $\phi(p) = 2d(p, fp)$ i $d(p, fp) \leq \phi(p) - \phi(fp)$. Ovaj primer pokazuje da i ako su oba preslikavanja f i ϕ neprekidna, preslikavanje f može imati više fiksnih tačaka.*

Primer 2.16.3 *Definišimo preslikavanje $f : [-1, 1] \mapsto [-1, 1]$ na sledeći način*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ \frac{x}{4} & , x \geq 0. \end{cases}$$

Primetimo da je $d(fx, f^2x) \leq \frac{1}{4}d(x, fx)$. Kao u Posledici 2.16.1, neka je $\phi(x) = \frac{4}{3}d(x, fx)$. Ako je $x < 0$, tada je $\lim_n f^n x = -1 = f(-1)$, a ako je $x > 0$, tada je $\lim_n f^n x = 0 = f(0)$. Prema tome, 0 i -1 su jedine fiksne tačke preslikavanja f. U ovom primeru, f i ϕ su prekidne funkcije, a $\phi(x) = \frac{4}{3}d(x, fx)$ je odozdo poluneprekidna funkcija, i $d(x, fx) \leq \phi(x) - \phi(fx)$.

2.17 Rezultati Rhoadesa za slabija kontraktibilna preslikavanja

Neka je X Banachov prostor, i $f : X \mapsto X$ preslikavanje koje zadovoljava Banachov kontraktivni uslov, tj. postoji konstanta λ, $0 \leq \lambda < 1$, tako da je za svako $x, y \in X$ ispunjen uslov

$$\|fx - fy\| \leq \lambda \|x - y\|. \tag{2.142}$$

Nejednakost (2.142) se može napisati u obliku

$$\|fx - fy\| \leq \|x - y\| - q \|x - y\|, \tag{2.143}$$

gde je $q = 1 - \lambda$.

Uopštivši uslov (2.143), Albert i Guerre-Delabriere [6] su 1997. godine definisali i izučavali slabije kontraktivna preslikavanja na Hilbertovim prostorima.

Rhoades [123] je 2001. godine izučavao slabija kontraktivna preslikavanja na kompletnim metričkim prostorima i Banachovim prostorima. U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate Rhoadesa iz pomenutog rada [123].

Definicija 2.17.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$ je slabija kontrakcija, ako je za svako $x, y \in X$ ispunjen uslov*

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) - \Psi(d(x, y)), \tag{2.144}$$

gde je $\Psi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ neprekidna i neopadajuća funkcija, $\Psi(t) > 0, t > 0$, $\Psi(0) = 0$ i $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$.

Teorema 2.17.1 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, a f slabije kontraktivno preslikavanje. Tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$.*

Dokaz: Jedinstvenost fiksne tačke sledi očigledno iz (2.144). Neka je $x_0 \in X$, i definišimo niz $x_{n+1} = fx_n$. Tada, iz (2.144) sledi

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(fx_n, fx_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) - \Psi(d(x_n, x_{n+1})).$$

Neka je $\rho_n = d(x_n, x_{n+1})$. Tada je

$$\rho_{n+1} \leq \rho_n - \Psi(\rho_n) \leq \rho_n. \tag{2.145}$$

Prema tome, $\{\rho_n\}$ je nenegativan, nerastući niz, i zato ima graničnu vrednost $\rho^* \geq 0$. Pretpostavimo da je $\rho^* > 0$. Kako je Ψ neopadajuća funkcija, sledi $\Psi(\rho_n) \geq \Psi(\rho^*) > 0$. Prema tome, iz (2.145) dobijamo $\rho_{n+1} \leq \rho_n - \Psi(\rho^*)$.

Tada je $\rho_{N+m} \leq \rho_m - N\Psi(\rho^*)$, što je kontradikcija za dovoljno veliko N. Sledi, $\rho^* = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ i izaberimo N tako da je $d(x_N, x_{N+1}) \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \Psi(\frac{\varepsilon}{2})\}$. Sada ćemo pokazati da f preslikava zatvorenu loptu $B(x_N, \varepsilon)$ u sebe samu. Neka je $x \in B(x_N, \varepsilon)$. Razlikovaćemo dva slučaja.

Slučaj 1. $d(x, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je

$$
\begin{aligned}
d(fx, x_N) &\leq d(fx, fx_N) + d(fx_N, x_N) \\
&\leq d(x, x_N) - \Psi(d(x, x_N)) + d(x_{N+1}, x_N) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Slučaj 2. $\frac{\varepsilon}{2} < d(x, x_N) \leq \varepsilon$. Tada je $\Psi(d(x, x_N)) \geq \Psi(\frac{\varepsilon}{2})$. Prema tome,

$$
\begin{aligned}
d(fx, x_N) &\leq d(x, x_N) - \Psi(d(x, x_N)) + d(x_{N+1}, x_N) \\
&\leq d(x, x_N) - \Psi(\frac{\varepsilon}{2}) + \Psi(\frac{\varepsilon}{2}) \\
&\leq d(x, x_N) \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Kako funkcija f preslikava loptu $B(x_N, \varepsilon)$ u samu sebe, sledi $x_n \in B(x_N, \varepsilon)$, za svako $n \geq N$. Kako $\varepsilon > 0$ može biti bilo koji broj, sledi $\{x_n\}$ je Cauchyev niz, a samim tim i konvergentan niz. Iz neprekidnosti funkcije f sledi da je granična vrednost ovog niza fiksna tačka preslikavanja f. $\square$

Primetimo da slabije kontraktivna preslikavanja zadovoljavaju definiciju Boyda i Wonga [22], a Teorema 2.17.1 je specijalan slučaj Teoreme 1 iz [22].

Sada ćemo posmatrati konvergenciju nekih drugih iterativnih procedura primenjenih na $f : X \mapsto X$, gde je X Banachov prostor. Jedna od njih je i Mannova [99] iterativna šema definisana sa

$$
x_0 \in X, \quad x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f x_n, \ n \geq 0, \tag{2.146}
$$

gde je $0 \leq \alpha_n \leq 1$ za svako n.

Teorema 2.17.2 *Neka je X Banachov prostor, K zatvoren konveksan podskup u X, i $f : K \mapsto K$ slabije kontraktivno preslikavanje. Tada, Mannova iterativna šema (2.146), za $0 \leq \alpha_n \leq 1$ i $\sum \alpha_n = \infty$, konvergira ka jedinstvenoj fiksnoj tački u preslikavanja f.*

Dokaz: Iz Teoreme 2.17.1, sledi preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in K$. Iz (2.146) sledi

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\| &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n f x_n - u\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - u\| + \alpha_n \|f x_n - u\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - u\| + \alpha_n[\|x_n - u\| - \Psi(\|x_n - u\|)] \\ &\le \|x_n - u\| - \alpha_n \Psi(\|x_n - u\|) \le \|x_n - u\|. \end{aligned} \tag{2.147}$$

Prema tome, $\{\|x_n - u\|\}$ je nenegativan, nerastući niz koji konvergira ka $L \ge 0$. Pretpostavimo da je $L > 0$.

Neka je $\lambda_n = \|x_n - u\|$, $n = 1, 2, \ldots$. Tada je $\lambda_n \ge L$. Iz (2.147) sledi za svaki fiksirani prirodan broj N

$$\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n \Psi(L) \le \sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n \Psi(\lambda_n) \le \sum_{n=N}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \le \lambda_N,$$

što je u kontradikciji sa uslovom $\sum \alpha_n = \infty$. Prema tome, $L = 0$. $\square$

Ishikawaina [77], [78] iterativna šema definisana je sa

$$\begin{aligned} x_0 \in X, \quad x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n f y_n \\ y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n f x_n, \ n \ge 0, \end{aligned} \tag{2.148}$$

gde je $0 \le \alpha_n, \beta_n \le 1$ za svako n.

Sledeća teorema može sa analogno dokazati kao i Teorema 2.17.2.

Teorema 2.17.3 *Neka je X Banachov prostor, K zatvoren konveksan podskup u X, i $f : K \mapsto K$ slabije kontraktivno preslikavanje. Tada Ishikawaina iterativna šema (2.148), za $0 \le \alpha_n, \beta_n \le 1$ i $\sum \alpha_n \beta_n = \infty$, konvergira ka jedinstvenoj fiksnoj tački $u \in X$ preslikavanja f.*

Sada definišimo Kirkovu [93] iterativnu šemu. Neka je X Banachov prostor i $f : X \mapsto X$ preslikavanje. Tada, za fiksirani prirodan broj k definišimo preslikavanje S na sledeći način

$$S = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f^i, \ \text{gde je } \alpha_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1, \ \text{i } \alpha_1 \ne 0. \tag{2.149}$$

Za $x_0 \in X$, Kirkova iterativna šema je definisana sa $x_{n+1} = S^n x_0$.

Teorema 2.17.4 *Neka je X Banachov prostor, i $f : X \mapsto X$ slabije kontraktivno preslikavanje. Tada, za svako $x_0 \in X$, iterativna šema $\{S^n x_0\}$, gde je S funkcija definisana uslovom (2.149), konvergira ka jedinstvenoj fiksnoj tački $u \in X$ preslikavanja f.*

Dokaz: Neka je $u \in X$ jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f. Tada je u fiksna tačka za S. Jedinstvenost fiksne tačke preslikavanja S pokazaćemo tako što dokažemo da je S slabije kontraktivno preslikavanje.

Dokažimo prvo da je za svako i, $1 \leq i \leq k$, preslikavanje f^i slabije kontraktivno preslikavanje.

Dokaz ćemo izvesti indukcijom. Tvrđenje je tačno za $i = 1$. Pretpostavimo da je tačno i za $i = j$. Kako je f slabije kontraktivno preslikavanje, tada je za svako $x, y \in X$

$$\begin{aligned}\|f^{j+1}x - f^{j+1}y\| &\leq \|f^j x - f^j y\| - \Psi(\|f^j x - f^j y\|) \leq \|f^j x - f^j y\| \\ &\leq \|x - y\| - \Psi(\|x - y\|),\end{aligned}$$

odnosno f^{j+1} je slabije kontraktivno preslikavanje.

Prema tome,

$$\begin{aligned}\|Sx - Sy\| &= \left\|\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (f^i x - f^i y)\right\| \leq \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \|f^i x - f^i y\| \\ &= \alpha_0 \|x - y\| + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \|f^i x - f^i y\| \\ &\leq \alpha_0 \|x - y\| + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [\|x - y\| - \Psi(\|x - y\|)] \\ &= \|x - y\| - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Psi(\|x - y\|),\end{aligned}$$

i S je slabije kontraktivno preslikavanje sa $\Phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Psi$. Iteracije $S^n x_0$ se mogu definisati sa $x_{n+1} = Sx_n$. Prema tome, njihova konvergencija ka u sledi iz Teoreme 2.17.1. $\square$

Teorema 2.17.5 *Neka je X Banachov prostor i $f : X \mapsto X$ slabije kontraktivno preslikavanje. Tada, Mannova iteracija za $0 < \alpha \leq \alpha_n \leq 1$, konvergira ka jedinstvenoj fiksnoj tački $u \in X$ preslikavanja f. Pri tome je*

$$\|x_{n+1} - u\| \leq \Phi^{-1}\left(\Phi(\|x_0 - u\|) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right),$$

gde je funkcija Φ definisana sa

$$\Phi(t) = \int \frac{dt}{\psi(t)},$$

a Φ^{-1} njena inverzna funkcija.

Dokaz: Konvergencija niza x_n ka u, sledi iz Teoreme 2.17.2. Odredimo procenu greške. Iz (2.147), za $\lambda_n = \|x_n - u\|$ imamo ,$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n)$. Tada je

$$\Phi(\lambda_n) - \Phi(\lambda_{n+1}) = \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\psi(\xi_n)},$$

za neko $\lambda_{n+1} < \xi_n < \lambda_n$. Kako je ψ neopadajuća funkcija, sledi

$$\Phi(\lambda_n) - \Phi(\lambda_{n+1}) = \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\psi(\xi_n)} \geq \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\psi(\lambda_n)} \geq \alpha_n.$$

Prema tome,

$$\Phi(\lambda_{n+1}) \leq \Phi(\lambda_n) - \alpha_n \leq \ldots \leq \Phi(\lambda_0) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k. \quad \square$$

Ukoliko u prethodnoj teoremi uzmemo $\alpha_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.17.6 *Neka je X Banachov prostor, K zatvoren konveksan podskup od X, i $f : K \mapsto K$ slabije kontraktivno preslikavanje. Tada, iterativni niz $x_{n+1} = fx_n$ konvergira ka fiksnoj tački $u \in K$ preslikavanja f. Pri tome je*

$$\|x_n - u\| \leq \Phi^{-1}\left(\Phi(\|x_1 - u\|)) - (n-1)\right),$$

gde je funkcija Φ definisano pomoću integrala

$$\Phi(t) = \int \frac{dt}{\Psi(t)}, \quad \Phi(0) = 0,$$

a Φ^{-1} je inverzna funkcija funkcije Φ.

Analogno dokazu Teoreme 2.17.5, može se dokazati sledeći rezultat.

Teorema 2.17.7 *Neka je X Banachov prostor i $f : X \mapsto X$ slabije kontraktivno preslikavanje. Tada, Ishikawa iteracija za $0 < \alpha_n,\ \beta_n \leq 1$, $\sum \alpha_n \beta_n = \infty$, konvergira ka jedinstvenoj fiksnoj tački $u \in X$ preslikavanja f. Pri tome je*

$$\|x_{n+1} - u\| \leq \Phi^{-1}\left(\Phi(\|x_0 - u\|) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k\right),$$

gde je funkcija Φ definisano sa

$$\Phi(t) = \int \frac{dt}{\psi(t)},$$

a Φ^{-1} njena inverzna funkcija.

2.18 Berindeova slaba kontrakcija

Berinde [15] je 2004. godine uveo i izučavao preslikavanje koje je nazvao slaba kontrakcija. U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz pomenutog rada.

Definicija 2.18.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \mapsto X$ je slaba kontrakcija ako postoji konstanta $\delta \in (0, 1)$ i $L \geq 0$ tako da je*

$$d(fx, fy) \leq \delta \cdot d(x, y) + Ld(y, fx), \qquad x, y \in X. \tag{2.150}$$

Napomena 2.18.1 *Kako je metrika simetrična funkcija, uslov slabe kontraktivnosti (2.150) može se zapisati i u sledećem obliku*

$$d(fx, fy) \leq \delta \cdot d(x, y) + Ld(x, fy), \quad x, y \in X. \tag{2.151}$$

Teorema 2.18.1 *Svako Kannanovo preslikavanje, tj. preslikavanje za koje postoji $b \in (0, \frac{1}{2})$ i zadovoljava kontraktivni uslov*

$$d(fx, fy) \leq b[d(x, fx) + d(y, fy)], \ x, y \in X, \tag{2.152}$$

je slaba kontrakcija.

Dokaz: Iz uslova (2.152), korišćenjem nejednakost trougla dobijamo

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &\leq b[d(x, fx) + d(y, fy)] \\ &\leq b\left\{[d(x,y) + d(y, fx)] + [d(y, fx) + d(fx, fy)]\right\}, \end{aligned}$$

odakle je

$$(1-b)d(fx, fy) \leq bd(x,y) + 2b \cdot d(y, fx).$$

Prema tome

$$d(fx, fy) \leq \frac{b}{1-b} \cdot d(x,y) + \frac{2b}{1-b} \cdot d(y, fx), \qquad x, y \in X,$$

tj., ispunjen je uslov (2.150) za $\delta = b/(1-b)$ i $L = 2b/(1-b)$. Kako je uslov (2.152) simetričan po x i y, to je ispunjen i uslov (2.151). □

Teorema 2.18.2 *Svako preslikavanje f koje zadovoljava uslov Chatterjea, tj., postoji $c \in (0, \frac{1}{2})$ tako da je*

$$d(fx, fy) \leq c[d(x, fy) + d(y, fx)], \qquad x, y \in X, \tag{2.153}$$

je slaba kontrakcija.

Dokaz: Iz

$$d(x, fy) \leq d(x,y) + d(y, fx) + d(fx, fy)$$

sledi

$$d(fx, fy) \leq \frac{c}{1-c} \cdot d(x,y) + \frac{2c}{1-c} \cdot d(y, fx).$$

Prema tome, uslov (2.150) je ispunjen za $\delta = c(1-c) < 1$ (jer je $c < 1/2$) i $L = 2c/(1-c) \geq 0$. Kako je uslov (2.153) simetričan po x i y, ispunjen je i uslov (2.151). □

Neposredno, iz Teoreme 2.18.1 i Teoreme 2.18.2 sledi sledeća posledica.

Posledica 2.18.1 *Preslikavanje f koje zadovoljava uslov Zamfirescua je slaba kontrakcija.*

Teorema 2.18.3 *Svaka kvazi-kontrakcija za $0 < h < \frac{1}{2}$ je slaba kontrakcija.*

Dokaz: Neka je $f : X \mapsto X$ kvazi-kontrakcija, $0 < h < 1/2$, tako da je

$$d(fx, fy) \leq h \cdot M(x, y), \qquad x, y \in X \tag{2.154}$$

gde je

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\}. \tag{2.155}$$

Za proizvoljne tačke $x, y \in X$ razmotrićemo pet slučajeva.

Napomenimo da zato što je $M(x, y) = M(y, x)$, u slučajevima 2 i 3 (slučajevima 4 i 5) dovoljno je pokazati da je ispunjen bar jedan od uslova (2.150) i (2.151).

Slučaj 1. $M(x, y) = d(x, y)$. Tada su uslovi (2.150) i (2.151) zadovoljeni (za $\delta = h$ i $L = 0$).

Slučaj 2. $M(x, y) = d(x, fx)$. Iz (2.154) i nejednakosti trougla sledi

$$d(fx, fy) \leq h\, d(x, fx) \leq h[d(x, y) + d(y, fx)],$$

i uslov (2.150) je ispunjen za $\delta = h$ i $L = h$.

Kako je $d(x, fx) \leq d(x, fy) + d(fy, fx)$, sledi

$$d(fx, fy) \leq \frac{h}{1-h} \cdot d(x, fy) \leq \delta\, d(x, y) + \frac{h}{1-h} \cdot d(x, fy),$$

za svako $\delta \in (0, 1)$. Prema tome, ispunjen je uslov (2.151).

Slučaj 3. $M(x, y) = d(x, fy)$. Tada su uslovi (2.150) i (2.151) ispunjeni, na osnovu Slučaja 2, zbog simetrije $M(x, y)$ po x i y.

Slučaj 4. $M(x, y) = d(x, fy)$. Tada je očigledno ispunjen uslov (2.151). Uslov (2.150) je ispunjen za $h < \frac{1}{2}$, jer iz (2.154) i

$$d(x, fy) \leq d(x, y) + d(y, fx) + d(fx, fy),$$

sledi

$$d(fx, fy) \leq \frac{h}{1-h} \cdot d(x, y) + \frac{h}{1-h} \cdot d(y, fx).$$

Prema tome, uslov (2.150) je ispunjen za $\delta = h/(1-h) < 1$ $(h < 1/2)$, i $L = h/(1-h) > 0$.

Slučaj 5. $M(x, y) = d(y, fx)$ se svodi na Slučaj 4. $\square$

Teorema 2.18.4 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ slaba kontrakcija, tj. preslikavanje koje zadovoljava uslov (2.150) za $\delta \in (0, 1)$ i neko $L \geq 0$. Tada je*

1) $F_f = \{x \in X : f(x) = x\} \neq \emptyset$.

2) *Za svako $x_0 \in X$, niz Picardovih iteracija $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definisan sa*

$$x_{n+1} = f x_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.156}$$

konvergira ka nekoj tački $u \in F_f$.

3) *Tačne su sledeće nejednakosti*

$$d(x_n, u) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \cdot d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.157}$$

$$d(x_n, u) \leq \frac{\delta}{1-\delta} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.158}$$

gde je δ konstanta iz (2.150).

Dokaz: Pokazaćemo da f ima bar jednu fiksnu tačku u X. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka i $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ niz Picardovih iteracija definisan sa (2.156).

Neka je $x = x_{n-1}$, $y = x_n$. Tada iz (2.150) dobijamo

$$d(fx_{n-1}, fx_n) \leq \delta \cdot d(x_{n-1}, x_n),$$

odakle sledi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta \cdot d(x_{n-1}, x_n). \tag{2.159}$$

Indukcijom, iz (2.159) dobijamo

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta^n \, d(x_0, x_1), \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

te je

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \delta^n (1 + \delta + \ldots + \delta^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\delta^n}{1-\delta}(1 - \delta^p) \cdot d(x_0, x_1), \quad n, p \in \mathbb{N}, \; p \neq 0. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Kako je $0 < \delta < 1$, iz (2.160) sledi niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Cauchyev, te je i konvergentan. Neka je

$$u = \lim_{n \to \infty} x_n. \tag{2.161}$$

Tada je

$$d(u, fu) \leq d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, fu) = d(x_{n+1}, u) + d(fx_n, fu).$$

Iz (2.150) imamo

$$d(fx_n, fu) \leq \delta d(x_n, u) + Ld(u, fx_n),$$

a sada za svako $n \geq 0$ sledi

$$d(u, fu) \leq (1 + L)d(u, x_{n+1}) + \delta \cdot d(x_n, u). \tag{2.162}$$

Kad $n \to \infty$, iz (2.162) dobijamo

$$d(u, fu) = 0,$$

tj., u je fiksna tačka preslikavanja f.

Iz (2.160), kada $p \to \infty$, dobijamo (2.157).

Da dokažemo (2.158), primetimo da iz (2.159) induktivno dobijamo

$$d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq \delta^{k+1} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \; k, n \in \mathbb{N},$$

i analogno, kao u dokazu (2.160), imamo

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\delta(1 - \delta^p)}{1 - \delta} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \quad n, p \in \mathbb{N}. \tag{2.163}$$

Kada $n \to \infty$, iz (2.163) sledi (2.158). □

Napomena 2.18.2

1) Teorema 2.18.4 je značajno uopštenje Teoreme Banacha, Teoreme Zamfirescua i mnogih sličnih rezultata.

2) Treba primetiti da i ako ove dve teoreme pomenute u 1) zapravo povlače jedinstvenost fiksne tačke, slabe kontrakcije u opštem slučaju ne moraju da imaju jedinstvenu fiksnu tačku, kao što se može videti iz Primera 2.18.1.

3) Slabe kontrakcije imaju neke važne osobine od kojih izdvajamo sledeće:

- *a) Za klasu slabih kontrakcija postoji metod konstrukcije fiksnih tačaka, naime Picardova iteraciona procedura.*

b) Za ovaj metod aproksimacije fiksnih tačaka postoje ocene greške. Ova činjenica je veoma važna sa praktične tačke gledišta, jer je na osnovu njih moguće odrediti kriterijum za zaustavljanje iterativne procedure.

c) Uslov (2.150) se lako proverava u konkretnim primerima.

4) Fiksna tačka $u \in X$ koja se dobija Picardovom iteracijm zavisi od početne vrednosti $x_0 \in X$. Zato klasa slabih kontrakcija predstavlja jednu prilično široku klasu slabijih Picardovih operatora; preeslikavanje $f : X \mapsto X$ je slabiji Picardov operator ako za svako $x_0 \in X$ niz $\{f^n x_0\}$ konvergira ka nekoj fiksnoj tački preslikavanja f (videti [128], [129], [131]).

5) Iz uslova (2.150) sledi Banachov orbitalni uslov

$$d(fx, f^2x) \leq a\, d(x, fx), \quad \text{za svako } x \in X,$$

proučavan od strane mnogobrojnih autora u kontekstu egzistencije fiksnih tačaka preslikavanja (videti [20], [68], [127], [130], [131]).

Teorema 2.18.5 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $f : X \mapsto X$ slaba kontrakcija, $\eta \in (0, 1)$ i $L_1 \geq 0$ tako da je*

$$d(fx, fy) \leq \eta \cdot d(x, y) + L_1 \cdot d(x, fx), \quad x, y \in X. \tag{2.164}$$

Tada

1) f ima jedinstvenu fiksnu tačku, tj. $F_f = \{u\}$.

2) Picardove iteracije $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dobijene iz (2.156) konvergiraju ka u, za svako $x_0 \in X$.

3) Pri tome je

$$d(x_n, u) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \cdot d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$d(x_n, u) \leq \frac{\delta}{1-\delta} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4) Stepen konvergencije Picardovih iteracija dat je sa

$$d(x_n, u) \leq \eta \cdot d(x_{n-1}, u), \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.165}$$

Dokaz: Pretpostavimo da f ima dve fiksne tačke $u, v \in X$. Tada, iz (2.164) imamo $d(u,v) \leq \eta \cdot d(u,v)$, odnosno $u = v$.

Iz (2.164) uzimajući $y = x_n$, $y = u$ dobijamo (2.165). Ostatak dokaza je analogan dokazu prethodne teoreme. $\square$

Napomena 2.18.3

1) *Primetimo da, zato što je metrika simetrična funkcija, uslov (2.164) je ispunjen za svako $x, y \in X$ ako i samo ako je ispunjen uslov*

$$d(fx, fy) \leq \eta d(x,y) + L_1 d(y, fy), \quad x, y \in X. \tag{2.166}$$

2) *Može se dokazati da ukoliko preslikavanje zadovoljava neki od uslova Banacha, Kannana, Chatterjea ili Zamfirescua, onda ono mora da zadovoljava i uslove (2.164) i (2.166). Prema tome, imajući u vidu Primer 2.18.1, Teorema 2.18.5 (kao i Teorema 2.18.4) je prava generalizacija teoreme Zamfirescua.*

   Šta više, svaka kvazi-kontrakcija kod koje je $0 < h < 1/2$ zadovoljava i uslove (2.164) i (2.166). Na taj način vidimo da Teorema 2.18.5 objedinjuje i uopštava teoreme Banacha, Kannana, Chatterjea i Zamfirescua, a delimično i Ćirićevu teoremu o kvazi-kontrakciji.

Navešćemo nekoliko primera u svrhu ilustracije prethodnih razmatranja.

Primer 2.18.1 *Neka je $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ identično preslikavanje, tj. $fx = x$, za svako $x \in [0,1]$. Tada*

1) *f ne zadovoljava Ćirićev kvazi-kontraktivni uslov, jer je $M(x,y) = |x-y|$ i*

$$|x-y| > h \cdot |x-y|, \text{ za svako } x \neq y \text{ i } 0 < h < 1.$$

2) *f zadovoljava uslov (2.150) za $\delta \in (0,1)$ i $L \geq 1-\delta$. Zaista, uslovi (2.150) i (2.151) slede iz*

$$|x-y| \leq \delta|x-y| + L \cdot |y-x|,$$

   što je ispunjeno za svako $x, y \in [0,1]$ ako uzmemo $\delta \in (0,1)$ i $L \geq 1-\delta$.

3) *Skup svih fiksnih tačaka preslikavanja f je segment $[0,1]$, tj. $F_f = [0,1]$.*

Sledeći primer pokazuje da kvazi-kontrakcija u opštem slučaju ne zadovoljava uslov (2.164).

Primer 2.18.2 *Neka je preslikavanje $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ dato sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & , x \in [0,1), \\ 1 & , x = 1. \end{cases}$$

Tada

1) *f zadovoljava Ćirićev kvazi-kontraktivni uslov za $h \in [\frac{2}{3}, 1)$;*
2) *f zadovoljava uslov (2.150) za $\delta \geq \frac{2}{3}$ i $L \geq \delta$;*
3) *f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u = \frac{2}{3}$;*
4) *f ne zadovoljava uslov (2.164).*

Primer 2.18.3 *Neka je preslikavanje $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ dato sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in [0,1), \\ 1 & , x = 1. \end{cases}$$

Tada

1) *f ne zadovoljava ni Ćirićev ni Zamfirescuov uslov;*
2) *f ima dve fiksne tačke, tj. $F_f = \{\frac{1}{2}, 1\}$;*
3) *f ne zadovoljava uslov (2.150).*
   Ako je $x, y \in [0,1)$ ili $x = y = 1$, uslov (2.150) je očigledno ispunjen. Ako je $x \in [0,1)$ i $y = 1$, uslov (2.150) se svodi na

$$\frac{1}{2} \leq \delta \cdot |x-1| + L \cdot \frac{1}{2},$$

   što je tačno za svako $\delta \in (0,1)$, ako je $L \geq 1$.

   Ako je $x = 1$ i $y \in [0,1)$, uslov (2.150) je ispunjen ako i samo ako je

$$\frac{1}{2} \leq \delta \cdot |1-y| + L \cdot |1-y|,$$

što je ekvivalentno sa $(\delta + L)(1 - y) \geq \frac{1}{2}$. *Ovo nije tačno, zato što je* L *konstanta, a* $1 - y \to 0$*, kada* $y \to 1$, $(y < 1)$. *Primetimo da uprkos činjenici da* f *ne zadovoljava uslov (2.150), svaka granična vrednost Picardove iteracije je fiksna tačka za* f*, bez obzira što* f *ne zadovoljava uslov (2.164).*

Glava 3

Preslikavanja lokalno kontraktivnog tipa

U ovoj glavi izlažemo rezultate iz radova Sehgala [134], Gusemana [59], kao i uopštenja njihovih rezultata koje je dao Ćirić [37, 38], a koji se odnose na kontraktivna preslikavanja lokalnog tipa u tački. Pored toga, u vezi sa prethodnim, izloženi su pojedini rezultzti Ray i Rhoadesa [116] i Matkowskia [100].

3.1 Teorema Sehgala

Teorema 3.1.1 *(Sehgal [134]). Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava uslov: postoji q, $0 \leq q < 1$ tako da za svako $x \in X$, postoji $n(x) \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $y \in X$*

$$d(f^{n(x)}y, f^{n(x)}x) \leq qd(y, x). \tag{3.1}$$

Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku u i $f^n(x_0) \to u$ za svako $x_0 \in X$.

Pre nego što dokažemo ovu teoremu, koja predstavlja glavni rezultat Sehgala, pokažimo lemu koja se koristi u dokazu teoreme.

Lema 3.1.1 *Neka je $f : X \to X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov prethodne teoreme. Tada je za svako $x \in X$,*

$$r(x) = \sup_n d(f^n x, x) \ < \infty.$$

Dokaz: Neka je $x \in X$ i neka je

$$l(x) = \max\{d(x, f^k x),\ k = 1, 2, \ldots, n(x)\}.$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji ceo broj $s \geq 0$ tako da je $s \cdot n(x) < n \leq (s+1) \cdot n(x)$, i

$$\begin{aligned}
d(x, f^n x) &\leq d(x, f^{n(x)} x) + d(f^{n(x)} x, f^n x) \\
&= d(x, f^{n(x)} x) + d(f^{n(x)} x, f^{n(x)} \cdot f^{n-n(x)} x) \\
&\leq l(x) + q d(x, f^{n-n(x)} x) \\
&\leq q d(x, f^{n(x)} x) + q d(f^{n(x)} x, f^{n(x)} f^{n-2n(x)} x) + l(x) \\
&\leq q l(x) + q^2 d(x, f^{n-2n(x)} x) + l(x) \\
&\leq \ldots \leq q^s d(x, f^{n-sn(x)} x) + q^{s-1} l(x) + \ldots + q l(x) + l(x) \\
&\leq q^s l(x) + q^{s-1} l(x) + \ldots + q l(x) + l(x) \\
&\leq \frac{l(x)}{1-q}.
\end{aligned}$$

Prema tome, $r(x) \leq l(x)(1-q)^{-1}$. $\square$

Dokaz teoreme: Neka je $x_0 \in X$. Definišimo niz $m_i \in \mathbb{N}$ i niz $x_i \in X$, tako da je $m_0 = n(x_0)$, $x_1 = f^{m_0} x_0$, i induktivno $m_i = n(x_i)$, $x_{i+1} = f^{m_i} x_i$. Dokažimo da je niz (x_n) konvergentan. Očigledno je

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(f^{m_{n-1}} x_{n-1}, f^{m_n} x_n) = d(f^{m_{n-1}} x_{n-1}, f^{m_{n-1}} \cdot f^{m_n} x_{n-1}) \\
&\leq q d(x_{n-1}, f^{m_n} x_{n-1}) \leq \ldots \leq q^n d(x_0, f^{m_n} x_0)
\end{aligned}$$

Prema tome, iz prethodne leme, sledi $d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n r(x_0)$. Sada, za $m > n$ imamo

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} q^i r(x_0) \\
&= \sum_{i=0}^{m-n-1} q^{i+n} r(x_0) = \frac{q^n}{1-q} \cdot r(x_0) \to 0,\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Sledi niz (x_n) je Cauchyev.

Neka $x_n \to u \in X$. Ako je $f(u) \neq u$, onda postoji par disjunktnih zatvorenih okolina U i V tako da $u \in U$, $f(u) \in V$ i

$$\rho = \inf\{d(x, y) \colon\ x \in U,\ y \in V\} > 0. \tag{3.2}$$

Kako je f neprekidno preslikavanje, postoji $k(f,u) \in \mathbb{N}$, tako da je $x_n \in U$ i $f(x_n) \in V$ za svako $n \geq k(f,u)$. Međutim,

$$\begin{aligned} d(x_n, fx_n) &= d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}} \cdot fx_{n-1}) \\ &\leq qd(x_{n-1}, fx_{n-1}) \leq \ldots < q^n d(x_0, fx_0) \to 0,\ n \to \infty, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji sa (3.2). Prema tome, $f(u) = u$. Jedinstvenost fiksne tačke sledi direktno iz (3.1). Dokažimo da je $\lim_n f^n(x_0) = u$. Neka je

$$\rho_* = \max\left\{d(u, f^m x_0)\colon\ m = 0, 1, 2, \ldots, (n(u) - 1)\right\}.$$

Za dovoljno veliko n, imamo $n = r \cdot n(u) + p,\ \ 0 \leq p < n(u),\ \ r > 0$, i

$$\begin{aligned} d(u, f^n x_0) &= d(f^{n(u)}u, f^{r \cdot n(u)+p}x_0) \\ &\leq qd(u, f^{(r-1)\cdot n(u)+p}x_0) \leq \ldots \leq q^r d(u, f^p x_0) \leq q^r \rho_*. \end{aligned}$$

Kako iz $n \to \infty$ sledi $r \to \infty$, vidimo da $d(u, f^n x_0) \to 0$ kada $n \to \infty$. $\square$

Seghal [134] je dao sledeći primer funkcije koja zadovoljava uslov (3.1), a svaka iteracija te funkcije nije kontrakcija.

Primer 3.1.1 *Neka je X zatvoren jedinični interval $[0,1]$ sa uobičajenom metrikom. Tada se X može napisati u sledećem obliku*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \cup \{0\}.$$

Neka je preslikavanje $f\colon X \to X$ definisano sa:

za svako $n = 1, 2, \ldots,$ neka

$$f\colon\ \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \to \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$$

i

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n+2}{n+3}\left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} & ,\ x \in \left[\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], \\ \frac{1}{2^{n+1}} & ,\ x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}\right], \\ 0 & ,\ x = 0. \end{cases}$$

Funkcija f je nerastuća, neprekidna na $[0,1]$ i 0 je jedinstvena fiksna tačka funkcije f. Osim toga, funkcija f nije kontrakcija.

Ako je $x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ i $y \in X$, onda ispitivanjem slučajeva $y \in [\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}]$ za $m \geq n$ i $m \leq n$, može se dokazati

$$|fx - fy| \leq \frac{n+3}{n+4} \cdot |x-y| \quad \text{za svako } y \in X.$$

Ako u (3.1) uzmemo $q = 1/2$, tada se za svako $x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$, može uzeti $n(x) = n+3$, a za $n(0)$ može se uzeti bilo koji prirodan broj veći od jedan.

Neka je sada $0 \leq q < 1$ i $N \in \mathbb{N}$; pokazaćemo da postoje x i y tako da je $|f^N x - f^N y| \geq q|x-y|$. Izaberimo $n \in \mathbb{N}$, tako da je $n > \frac{Nq}{1-q} - 2$. Kako je f^i ravnomerno neprekidno preslikavanje na $[0,1]$ za $i = 1, 2, \ldots, N$, postoji $\delta > 0$ tako da

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f^i x - f^i y| < \frac{n+N+3}{(n+N+2)2^{n+N+1}}$$

za $i = 1, 2, \ldots, N$. Ako uzmemo $x = \frac{1}{2^{n-1}}$, a $y \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ tako da je $0 < |x-y| < \delta$, tada se može pokazati da

$$f^i(x), f^i(y) \in \left[\frac{3(n+i)+5}{2^{n+i+1}(n+i+2)}, \frac{1}{2^{n+i-1}}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
|fx - fy| &= \frac{n+2}{n+3} \cdot |x-y|, \\
|f^2 x - f^2 y| &= \frac{n+2}{n+4} \cdot |x-y|, \\
&\vdots \\
|f^N x - f^N y| &= \frac{n+2}{n+2+N} \cdot |x-y| > q|x-y|. \quad \square
\end{aligned}$$

3.2 Rezultati Gusemana

U ovoj sekciji predstavićemo rezultate L. Gusemana [59] koji su generalizacija rezultata Sehgala [134], a odnose se na preslikavanja koja nisu neprekidna.

Lema 3.2.1 *Neka je (X, d) metrički prostor, $f : X \mapsto X$, $B \subset X$ i $f(B) \subset B$. Pretpostavimo da postoji $u \in B$ i $n(u) \in \mathbb{N}$ tako da je $f^{n(u)} u = u$ i*

$$d(f^{n(u)} x, f^{n(u)} u) \leq q d(x, u), \tag{3.3}$$

za neko q, $0 \leq q < 1$, i svako $x \in B$. Tada je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f u B i $\lim_n f^n y_0 = u$ za svako $y_0 \in B$.

Dokaz: Iz (3.3), sledi da je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja $f^{n(u)}$ iz B. Tada iz $f(u) = ff^{n(u)}u = f^{n(u)}fu$ sledi $f(u) = u$. Dakle, u je ujedno i jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f iz B. Neka je $y_0 \in B$. Primetimo da iz $f(B) \subset B$ sledi $\{f^n(y_0) \colon n \geq 1\} \subset B$. Neka je

$$\alpha(y_0) = \max\left\{d(f^m y_0, u) \colon 1 \leq m \leq n(u) - 1\right\}.$$

Za $n > n(u)$, neka su r i s celi brojevi tako da je $n = r \cdot n(u) + s,\ \ r > 0,\ \ 0 \leq s < n(u)$. Tada je

$$\begin{aligned} d(f^n y_0, u) &= d(f^{r\cdot n(u)+s} y_0, f^{n(u)}u) \leq qd(f^{(r-1)\cdot n(u)+s} y_0, u) \\ &\leq \ldots \leq q^r d(f^s y_0, u) \leq q^r \alpha(y_0), \end{aligned}$$

odnosno, $f^n(y_0) \to u,\ n \to \infty$. $\square$

Teorema 3.2.1 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$. Pretpostavimo da postoji $B \subset X$ tako da je*

(a) $f(B) \subset B$,

(b) za neko q, $0 \leq q < 1$ i svako $y \in B$ postoji $n(y) \in \mathbb{N}$ tako da je $d(f^{n(y)}x, f^{n(y)}y) \leq qd(x, y)$ za svako $x \in B$ i

(c) za neko $x_0 \in B$, $cl\{f^n x_0 : n \geq 1\} \subset B$ (ovde je sa cl označeno zatvorenje skupa).

Tada postoji jedinstvena tačka $u \in B$ tako da je $f(u) = u$ i $f^n y_0 \to u$ za svako $y_0 \in B$. Osim toga, ako je $d(f^{n(u)}x, f^{n(u)}u) \leq qd(x, u)$ za svako $x \in X$, tada je tačka u jedinstvena u X i $f^n x_0 \to u$ za svako $x_0 \in X$.

Dokaz: Neka je $y \in B$. Može se pokazati da je $r(y) = \sup_n d(f^n y, y) < \infty$. Za $x_0 \in B$ iz uslova (c), neka je $m_0 = n(x_0)$, $x_1 = f^{m_0}(x_0)$, i induktivno (zbog uslova (a) i (b)) definišimo nizove $m_i = n(x_i)$, $x_{i+1} = f^{m_i}(x_i)$. Tačne su sledeće nejednakosti:

$$d(x_{i+1}, x_i) \leq q^i d(f^{m_i} x_0, x_0) \leq q^i \cdot r(x_0), \quad i \geq 1,$$

$$d(x_j, x_i) \leq \textstyle\sum_{l=1}^{j-1} d(x_{l+1}, x_l) \leq \frac{q^i}{1-q} \cdot r(x_0), \quad j > i.$$

Sledi (x_i) je Cauchyev niz. Koristeći kompletnost prostora X i uslov (c), sledi $x_i \to u \in B$. Prema tome, postoji $n(u) \in \mathbb{N}$ tako da je $d(f^{n(u)}y, f^{n(u)}u) \leq qd(y,u)$ za svako $y \in B$. Sledi, $f^{n(u)}x_i \to f^{n(u)}u$. Tada je

$$d(f^{n(u)}u, u) = \lim_i d(f^{n(u)}x_i, x_i).$$

Međutim,

$$\begin{aligned} d(f^{n(u)}x_i, x_i) &= d(f^{m_{i-1}} \cdot f^{n(u)}x_{i-1}, f^{m_{i-1}}x_{i-1}) \\ &\leq qd(f^{n(u)}x_{i-1}, x_{i-1}) \leq \dots \\ &\leq q^i d(f^{n(u)}x_0, x_0) \to 0,\ i \to \infty. \end{aligned}$$

Zato je $f^{n(u)}(u) = u$. Na osnovu Leme 3.2.1, u je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f iz B i $f^n(y_0) \to u$ za svako $y_0 \in B$. □

Napomena 3.2.1 *Primetimo da iz $x_n \to u$ sledi $f^{n(u)}x_n \to f^{n(u)}u$ za svako f koje zadovoljava uslov (3.3). Prema tome, dokaz sledeće teoreme sledi direktno iz Leme 3.2.1.*

Teorema 3.2.2 *Neka je (X,d) metrički prostor, $f : X \to X$, $u, y_0 \in X$, i $f^n(y_0) \to u$. Ako f zadovoljava uslov (3.3) za svako $x \in X$, tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$ i $f^n x_0 \to u$ za svako $x_0 \in X$.*

Sledeći primeri pokazuju da je Teorema 3.2.1 uopštenje Teoreme 3.1.1. Svi skupovi imaju uobičajenu metriku.

Primer 3.2.1 *Definišimo $f : [0,1] \to [0,1]$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \\ 1-x, & \text{ako je } x \text{ racionalan broj.} \end{cases}$$

Tada je $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Za q, $0 \leq q < 1$, neka je $B = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup A$, gde je A proizvoljan podskup iracionalnih brojeva iz $[0,1]$. Jednostavno se pokazuje da B ne može sadržati bilo koji racionalni broj $x \neq \frac{1}{2}$.

Primer 3.2.2 *Definišimo $f : [0,1] \to [0,1]$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \\ x, & \text{ako je } x \text{ racionalan broj.} \end{cases}$$

Tada je svaki racionalan broj x fiksna tačka preslikavanja f. Za q, $0 \leq q < 1$, neka je $B = \{x\}$, gde je x racionalan broj iz $[0,1]$.

Primer 3.2.3 *Neka je* $B = \{0\} \cup \{x : x \text{ je iracionalan broj iz } [0,1)\}$, *i definišimo* $f\colon [0,1) \to [0,1)$ *sa*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in B, \\ 2^{-n}x, & x \in \left[2^{-n}, 2^{-(n-1)}\right) \setminus B, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tada je 0 *fiksna tačka preslikanja* f *na* $[0,1)$. *Za svako* $x_0 \in [0,1)$, $f^n x_0 \to 0,\ n \to \infty$ *i*

$$d(fx_0, f0) \leq \frac{1}{2} d(x_0, 0).$$

Pokazaćemo da postoji $x_0 \in [0,1)$ *tako da za svako* $m \geq 1$ *postoji* $x_m \in [0,1)$ *tako da je*

$$d(f^m x_m, f^m x_0) = d(x_m, x_0).$$

Neka je $x_0 = \frac{1}{2}$ *i neka je* $\alpha(m) = 2^m,\ m \geq 1$. *Mogu se dokazati sledeće činjenice:*

(i) $f^m(\frac{1}{2}) = 2^{-\alpha(m)}$.

(ii) $f^{m+1}(\frac{1}{2}) = \left[f^m(\frac{1}{2})\right]^2 = \left[f(\frac{1}{2})\right]^{\alpha(m)}$.

(iii) $f^m(x) = 4 \cdot \left[f^m(\frac{1}{2})\right]^2 x$ *ako je* $2^{-2} \leq x < 2^{-1}$.

Neka je $y_m = (2^{\alpha(m)} + 2)^{-1}$, *za svako* m. *Iz (i)-(iii) sledi*

$$d(f^m(\tfrac{1}{2}), f^m(\tfrac{1}{2} - y_m)) = d(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - y_m), \qquad m \geq 0.$$

Prema tome, funkcija f *nema ni jednu kontraktivnu iteraciju.*

3.3 Rezultati Ćirića

U ovoj sekciji izlažemo rezultate Ćirića ([37],[38]) u kojima se nastavlja istraživanje iz radova Sehgala [134] i Gussemana [59].

Neka je (X, d) metrički prostor. Ćirić je izučavao preslikavanja koja ne moraju biti neprekidna i koja zadovoljavaju uslov: postoji q, $0 \leq q < 1$ tako da za svako $x \in X$ postoji $n(x) \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $y \in X$

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y) \leq q \max\Big\{d(x,y), d(y, f^{n(x)}x), d(x, f^{n(x)}y), \frac{1}{2}[d(x, f^{n(x)}x) + d(y, f^{n(x)}y)]\Big\}. \qquad (3.4)$$

Takođe, izučavao je i preslikavanja koja zadovoljavaju uslov: postoji q, $0 \leq q < 1$ tako da za svako $x \in X$ postoji $n(x) \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $y \in X$

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y) \leq q \max \Big\{ d(x,y), \frac{1}{3}[d(y, f^{n(x)}x) + d(x, f^{n(x)}y)], \frac{1}{3}[d(x, f^{n(x)}x) + d(y, f^{n(x)}y)] \Big\}. \tag{3.5}$$

Preslikavanje $f\colon X \to X$ je orbitalno neprekidno ako iz $u = \lim_i f^{n_i}x_0$ sledi $fu = \lim_i ff^{n_i}x_0$. Prostor X je $f-$orbitalno kompletan ako svaki Cauchyev niz oblika $\{f^{n_i}x : i \in N\}$ konvergira u X.

Sledeća teorema je uopštenje Teoreme 3.2.2.

Teorema 3.3.1 *(Ćirić ([37]) Neka je (X,d) metrički prostor, $f : X \to X$, i $f^n(y_0) \to u$, $u, y_0 \in X$. Ako f zadovoljava uslov (3.4) u tački u, tj. ako postoji $n(u) \in \mathbb{N}$, i q, $0 \leq q < 1$ tako da je*

$$d(f^{n(u)}x, f^{n(u)}u) \leq q \max \Big\{ d(x,u), d(u, f^{n(u)}x), d(x, f^{n(u)}u), \frac{1}{2}[d(x, f^{n(u)}x) + d(u, f^{n(u)}u)] \Big\} \tag{3.6}$$

za svako $x \in X$, tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$ i $lim_n f^n x = u$ za svako $x \in X$.

Dokaz: Iz $lim_n f^n x_0 = u$ sledi $lim_n f^{n(u)} f^n x_0 = lim_n f^{n(u)+n} x_0 = u$. Kako f zadovoljava uslov (3.6) imamo

$$\begin{aligned} d(u, f^{n(u)}u) &\leq d(u, f^n x) + d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + d(f^{n(u)} f^n x, f^{n(u)}u) \\ &\leq d(u, f^n x) + d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + q \cdot a(f^n x, u), \end{aligned}$$

gde je

$$a(f^n x, u) = \max \Big\{ d(f^n x, u),\ d(f^n x, f^{n(u)}u),\ d(u, f^{n(u)+n}x), \frac{1}{2}[d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + d(u, f^n u)] \Big\}.$$

Prema tome,

$$d(u, f^{n(u)}u) \leq d(u, f^n x) + d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + q \cdot d(f^n x, u)$$

ako je $a(f^n x, u) = d(f^n x, u)$, ili

$$d(u, f^{n(u)}u) \leq \frac{1}{2-q}(2d(u, f^n x) + (2+q)d(f^n x, f^{n(u)+n}x))$$

ako je $a(f^n x, u) = \frac{1}{2}[d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + d(u, f^n u)]$, ili

$$d(u, f^{n(u)}u) \leq \frac{1}{1-q}(d(u, f^n x) + d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + q \cdot d(f^n x, u))$$

ako je $a(f^n x, u) = d(f^n x, f^{n(u)}u)$, ili

$$d(u, f^{n(u)}u) \leq d(u, f^n x) + d(f^n x, f^{n(u)+n}x) + q \cdot d(u, f^{n(u)+n}x)$$

ako je $a(f^n x, u) = d(u, f^{n(u)+n}x)$.

Iz $\lim_n f^n x = u$, sledi $d(u, f^{n(u)}u) = 0$, tj. $f^{n(u)}u = u$. Iz (3.6) sledi u je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja $f^{n(u)}$ u X. Sada iz $fu = ff^{n(u)}u = f^{n(u)}fu$ sledi $fu = u$. Očigledno je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f.

Dokažimo da je $\lim_n f^n y = u$ za svako $y \in X$. Neka je

$$b(y) = \max\{d(y, f^k y) : k = 1, 2, \ldots, n(u)\}.$$

Ako je $n \in \mathbb{N}$, tada postoje celi brojevi r i s, $r \geq 0$ i $0 \leq s \leq n(u) - 1$ tako da je $n = rn(u) + s$. Prema tome,

$$\begin{aligned} d(u, f^n y) &= d(u, f^{rn(u)+s}y) = d(f^{n(u)}u, f^{n(u)}f^{(r-1)n(u)+s}y) \\ &\leq q \cdot \max\Big\{d(u, f^{(r-1)n(u)+s}y),\ \frac{1}{2}d(f^{(r-1)n(u)+s}y, f^n y), \\ &\qquad d(u, f^n y),\ d(f^{(r-1)n(u)+s}y, u)\Big\}. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(u, f^{rn(u)+s}y) \leq qd(u, f^{(r-1)n(u)+s}y),$$

ili

$$d(u, f^{rn(u)+s}y) \leq \frac{q}{2-q} \cdot d(u, f^{(r-1)n(u)+s}y) < qd(u, f^{(r-1)n(u)+s}y).$$

Sledi

$$d(u, f^{rn(u)+s}y) \leq qd(u, f^{(r-1)n(u)+s}y).$$

Kada se ova nejednakost primeni r puta, dobijamo

$$d(u, f^{rn(u)+s}y) \leq q^r d(u, f^s y) \leq q^r \cdot b(y).$$

Kako iz $n \to \infty$ sledi $r \to \infty$, imamo $\lim_n d(u, f^n y) = 0$. □

Lema 3.3.1 *(Ćirić ([37]) Neka je (X, d) metrički prostor, $f \colon X \to X$ i zadovoljava uslov (3.4). Tada je za svako $x \in X$, $r(x) = \sup_n d(x, f^n x) < \infty$.*

Dokaz: Neka je $x \in X$ i

$$l(x) = \max\{d(f^k x, x) \colon k = 1, 2, \ldots, n(x)\}.$$

Za dato $n \in \mathbb{N}$, neka su p i s celi brojevi, $p \geq 0$ i $0 \leq s \leq n(x) - 1$ tako da je $n = pn(x) + s$. Sada, iz

$$\begin{aligned} d(x, f^{pn(x)+s}x) &\leq d(x, f^{n(x)}x) + d(f^{n(x)}x, f^{n(x)} f^{(p-1)n(x)+s}x) \\ &\leq d(x, f^{n(x)}x) + qc, \end{aligned}$$

gde je

$$c = c(x, f^{(p-1)n(x)+s}x) = \max\Big\{ d(x, f^{(p-1)n(x)+s}x), d(x, f^n x),$$
$$\frac{1}{2}[d(f^{(p-1)n(x)+s}x, f^{n(x)}x), d(x, f^{n(x)}x) + d(f^{(p-1)n(x)+s}x, f^n x)] \Big\},$$

sledi

(i) $$d(x, f^{pn(x)+s}x) \leq d(x, f^{n(x)}x) + qd(x, f^{(p-1)n(x)+s}x)$$

ako je $c = d(x, f^{(p-1)n(x)+s}x)$, ili

(ii) $$d(x, f^{pn(x)+s}x) \leq \tfrac{2+q}{2-q} \cdot d(x, fx) + \tfrac{q}{2-q} \cdot d(x, f^{(p-1)n(x)+s}x)$$

ako je $c = \frac{1}{2} \cdot [d(x, f^{n(x)}x) + d(f^{(p-1)n(x)+s}x, f^n x)]$, ili

(iii) $$d(x, f^{pn(x)+s}x) \leq \tfrac{1}{1-q} \cdot d(x, f^{n(x)}x)$$

ako je $c = d(x, f^n x)$, ili

(iv) $$d(x, f^{pn(x)+s}x) \leq (1+q)d(x, f^{n(x)}x) + qd(x, f^{(p-1)n(x)+s}x)$$

ako je $c = d(f^{(p-1)n(x)+s}x, f^{n(x)}x)$.

Kako je
$$\max\left\{1, \frac{2+q}{2-q}, \frac{1}{1-q}, (1+q)\right\} = \frac{1}{1-q},$$
a
$$\max\left\{q, \frac{q}{2-q}, 0\right\} = q,$$
u svakom od slučajeva (i), (ii), (iii), (iv) imamo
$$d(x, f^{pn(x)+s}x) \leq \frac{1}{1-q} \cdot d(x, f^{n(x)}x) + qd(x, f^{(p-1)n(x)+s}x).$$
Koristeći ovu nejednakost r puta dobijamo
$$\begin{aligned} d(x, f^{pn(x)+s}x) &\leq \frac{1}{1-q} \cdot d(x, f^{n(x)}x) + q\frac{1}{1-q} \cdot d(x, f^{n(x)}x) + \ldots + \\ &\quad + q^{p-1}\frac{1}{1-q} \cdot d(x, f^{n(x)}x) + q^r d(x, f^{n(x)}x) \\ &\leq (1 + q + \ldots + q^{p-1})\frac{1}{1-q} \cdot b(x) + q^r \frac{1}{1-q} \cdot b(x) \\ &\leq \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 b(x). \end{aligned}$$
Kako je $n = pn(x) + s$ proizvoljno, dokazali smo da je
$$d(x, f^n x) \leq \left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \max\{d(x, f^k x) \colon\ k = 1, 2, \ldots n(x)\}. \quad \square$$

Sada možemo dokazati sledeći rezultat.

Teorema 3.3.2 *(Ćirić ([37]) Neka je $f\colon X \to X$, a (X,d) $f-$orbitalno kompletan metrički prostor. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in X$, $\overline{0}(x_0) = cl\{f^n x_0 : n \in N\}$ tako da za q, $0 \le q < 1$ i svako $x \in \overline{0}(x_0)$ postoji $n(x) \in \mathbb{N}$ tako da f zadovoljava uslov (3.5) za svako $y \in \overline{0}(x_0)$. Tada je $\lim_n f^n x_0 = u$ i $fu = u$. Osim toga, ako f zadovoljava uslov (3.6), tada je $u \in X$ jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f i $\lim_n f^n x = u$ za svako $x \in X$.*

Dokaz: Ako f zadovoljava uslov (3.5), tada f zadovoljava i uslov (3.4) na $\overline{0}(x_0)$. Prema tome, $r(x_0) = \sup_n d(x_0, f^n x_0) < \infty$. Posmatrajmo niz

$$x_0,\ x_1 = f^{n(x_0)}x_0,\ x_2 = f^{n(x_1)}x_1, \ldots,\ x_{i+1} = f^{n(x_i)}x_i, \ldots$$

Za $s \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned} d(x_i, f^s x_i) &= d(f^{n(x_{i-1})}x_{i-1}, f^{n(x_{i-1})}f^s x_{i-1}) \\ &\le q \max\Bigg\{ d(x_{i-1}, f^s x_{i-1}),\ \frac{1}{3}[d(x_{i-1}, f^{n(x_{i-1})}x_{i-1}) + d(f^s x_{i-1}, f^s x_i)], \\ &\qquad \frac{1}{3}[d(x_{i-1}, f^s x_i) + d(f^s x_{i-1}, x_i)] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Zato je

$$d(x_i, f^s x_i) \le q d(x_{i-1}, f^s x_{i-1}),$$

ili

$$\begin{aligned} &d(x_i, f^s x_i) \\ &\le q \max\{d(x_{i-1}, f^{n(x_{i-1})}x_{i-1}),\ d(x_{i-1}, f^s x_{i-1}),\ d(x_{i-1}, f^{s+n(x_{i-1})}x_{i-1})\}, \end{aligned}$$

ili

$$d(x_i, f^s x_i) \le q \max\{d(x_{i-1}, f^s x_i),\ d(x_{i-1}, f^s x_{i-1}),\ d(x_{i-1}, f^{n(x_{i-1})}x_{i-1})\}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} &d(x_i, f^s x_i) \\ &\le q \max\{d(x_{i-1}, f^s x_{i-1}),\ d(x_{i-1}, f^{n(x_{i-1})}x_{i-1}),\ d(x_{i-1}, f^{s+n(x_{i-1})}x_{i-1})\}. \end{aligned}$$

Koristeći ovu nejednakost više puta, dobija se

$$\begin{aligned} d(x_i, f^s x_i) \le q \max\Big\{ & d(x_{i-2}, f^s x_{i-2}),\ d(x_{i-2}, f^{n(x_{i-2})}x_{i-2}), \\ & d(x_{i-2}, f^{s+n(x_{i-2})}x_{i-2}), d(x_{i-2}, f^{n(x_{i-1})}x_{i-2}), \end{aligned}$$

$$d(x_{i-2}, f^{n(x_{i-1})+n(x_{i-2})}x_{i-2}),$$
$$\left. d(x_{i-2}, f^{s+n(x_{i-1})}x_{i-2}),\ d(x_{i-2}, f^{s+n(x_{i-1})+n(x_{i-2})}x_{i-2}) \right\}$$
$$\leq \ldots \leq q^i r(x_0).$$

Sledi $f^n x_0$ je Cauchyev niz. Kako je X $f-$orbitalno kompletan prostor, postoji $u \in \overline{0}(x_0)$ tako da je $u = \lim_n f^n x_0$. Kako iz uslova (3.5) sledi (3.4), na osnovu Teoreme 3.3.1 sledi $fu = u$. Poslednje tvrđenje teoreme sledi direktno iz Teoreme 3.1.1. $\square$

Teorema 3.3.3 *(Ćirić [38]) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$. Ako za $o \leq \alpha < 1$, za svako $x \in X$ postoji $n = n(x) \in \mathbb{N}$, tako da je*

$$d(f^n x, f^n y) \leq \alpha \max\Big\{ d(x,y), d(x,fy), d(x,f^2y),$$
$$d(x,f^3y), \ldots, d(x,f^ny), d(x,f^nx) \Big\} \tag{3.7}$$

za svako $y \in X$, tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$. Šta više, za svako $x \in X$, $\lim_{m\to\infty} f^m x = u$.

Dokaz: Dokažimo da je za svako $x \in X$, orbita $\{f^m x\}_{m=0}^{\infty}$ ograničen podskup u X, tj., da je za svako $x \in X$

$$r(x) = \sup_{m>0}\{d(x, f^m x)\} \leq \frac{1}{1-\alpha} \cdot \max_{0<s\leq n(x)} d(x, f^s x). \tag{3.8}$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $k = k(x, m) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$d(x, f^k x) = \max\{d(x, f^r x) \colon 0 < r \leq m\}. \tag{3.9}$$

Možemo pretpostaviti da je $m > n = n(x)$ i $k > n = n(x)$. Prema tome, iz nejednakosti trougla i (3.7) imamo

$$d(x, f^k x) \leq d(x, f^n x) + d(f^n x, f^n f^{k-n} x)$$
$$\leq d(x, f^n x) + \alpha \max\Big\{ d(x, f^{k-n}x),\ d(x, f^{k-n+1}x), \ldots,$$
$$d(x, f^k x),\ d(x, f^n x) \Big\}$$
$$\leq d(x, f^n x) + max\{d(x, f^r x) \colon 0 < r \leq m\}.$$

Koristeći (3.9), imamo

$$d(x, f^k x) \le d(x, f^n x) + \alpha d(x, f^k x),$$

odnosno

$$d(x, f^k x) \le \frac{d(x, f^n x)}{1-\alpha}.$$

Sledi

$$\max\{d(x, f^r x) \colon 0 < r \le m\} \le \frac{d(x, f^n x)}{1-\alpha},$$

odnosno,

$$\sup_{m>n}\{d(x, f^m x)\} \le \frac{d(x, f^n x)}{1-\alpha}.$$

Nejednakost (3.8) sada sledi direktno.

Sada, neka je $x_0 = x \in X$, $n_0 = n(x_0)$, $x_1 = f^{n_0}x - 0$ i induktivno definišimo nizove

$$n_k = n(x_k), \quad x_{k+1} = f^{n_k} x_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Očigledno, $\{x_k\}$ je podniz orbite $\{f^m x_0\}_{m=0}^{\infty}$. Koristeći ovaj podniz pokazaćemo da je $\{f^m x_0\}_{m=0}^{\infty}$ Cauchyev niz.

Neka je x_k proizvoljan član niza $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, a $x_p = f^p x_0$ i $x_q = f^q x_0$ dva člana orbite $\{f^m x_0\}_{m=0}^{\infty}$ koja su u nizu posle x_k. Prema tome, $x_p = f^r x_k$ i $x_q = f^s x_k$ za neko $r, s \in \mathbb{N}$. Na osnovu uslova (3.7) sledi

$$d(x_k, x_p) = d(x_k, f^r x_k) = d(f^{n_{k-1}} x_{k-1}, f^{n_{k-1}} f^r x_{k-1}) \le \alpha d(x_{k-1}, f^{r_1} x_{k-1}),$$

gde je

$$\begin{aligned} d(x_{k-1}, f^{r_1} x_{k-1}) = \max\Big\{ & d(x_{k-1}, f^r x_{k-1}),\ d(x_{k-1}, f^{r+1} x_{k-1}), \ldots, \\ & d(x_{k-1}, f^{r+n_{k-1}} x_{k-1}),\ d(x_{k-1}, f^{n_{k-1}} x_{k-1}).\Big\} \end{aligned}$$

Analogno,

$$d(x_{k-1}, f^{r_1} x_{k-1}) \le \alpha d(x_{k-2}, f^{r_2} x_{k-2}),$$

gde je

$$d(x_{k-2}, f^{r_2} x_{k-2}) = \max\{d(x_{k-2}, f^{r_2} x_{k-2}), \ldots d(x_{k-2}, f^{n_{k-2}} x_{k-2})\}.$$

Kada se ovaj postupak ponovi k-puta imamo

$$\begin{aligned} d(x_k, x_p) &\leq \alpha d(x_{k-1}, f^{r_1} x_{k-1}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{k-2}, f^{r_2} x_{k-2}) \leq \ldots \leq \alpha^k d(x_0, f^{r_k} x_0). \end{aligned}$$

Prema tome, $d(x_k, x_p) \leq \alpha^k r(x)$, odnosno,

$$d(x_k, x_q) = d(x_k, f^s x_k) \leq \alpha^k r(x).$$

Sledi

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_k, x_p) + d(x_k, x_q) \leq \alpha^k \cdot 2r(x), \tag{3.10}$$

i $\{f^m x_0\}_{m=0}^{\infty}$ je Cauchyev niz. Zato postoji $u \in X$ tako da je $u = lim_m f^m x_0$. Pokazaćemo da je $f^{n(u)} u = u$. Za $m \geq n = n(u)$, sada imamo

$$\begin{aligned} d(f^n u, f^n f^m x_0) \leq \alpha \max \Big\{ & d(u, f^m x_0),\ d(u, f^{m+1} x_0), \ldots, \\ & d(u, f^{m+n} x_0),\ d(u, f^n x_0) \Big\}. \end{aligned}$$

Kad $m \to \infty$, sledi

$$d(f^n u, u) \leq \alpha d(u, f^n u),$$

te je u fiksna tačka preslikavanja $f^{n(u)}$. Dokažimo da je u fiksna tačka preslikavanja f. Neka je $fu \neq u$ i

$$d(u, f^k u) = \max\{d(u, f^r u) \colon 0 < r \leq n = n(u)\} > 0.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} d(u, f^k u) = d(f^n u, f^k f^n u) &= d(f^n u, f^n f^k u) \\ &\leq \alpha \max\{d(u, f^k u),\ d(u, f^{k+1} u), \ldots, d(u, f^{k+n} u),\ d(u, f^n u)\} \\ &\leq \alpha d(u, f^k u), \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Sledi u je fiksna tačka preslikavanja f. Jedinstvenost fiksne tačke sledi direktno iz (3.7). $\square$

Ova teorema je uopštenje Teoreme 3.1.1. Ako pretpostavimo da je f neprekidno preslikavanje, tada inamo

Teorema 3.3.4 *(Ćirić [38]). Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava sledeći uslov: za svako $x \in X$ postoji $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tako da za svako $y \in X$,*

$$d(f^n x, f^n y) \leq \alpha \max\{d(x,y),\ d(x,fy),\ d(x,f^2y),\ldots,\ d(x,f^n y),\\ d(x,fx),\ d(x,f^2x),\ldots,d(x,f^n x)\}, \tag{3.11}$$

gde je $0 \leq \alpha < 1$. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$. Šta više, za svako $x \in X$, $\lim_{k\to\infty} f^k x = u$.

Dokaz: Neka je x proizvoljna tačka iz X. Tada, kao u dokazu Teoreme 3.3.3, orbita $\{f^m x\}_{m=0}$ je ograničen podskup u X, a kao niz je Cauchyev niz. Zato postoji $u \in X$ tako da je $\lim_m f^m x = u$. Kako je $f^{n(u)}$ neprekidna funkcuija, sledi

$$f^{n(u)}u = f^{n(u)}(\lim_{m\to\infty} f^m x) = \lim_{m\to\infty} f^{m+n(u)}x = u.$$

Prema tome, u je fiksna tačka preslikavanja $f^{n(u)}$, a kao u dokazu Teoreme 3.3.3, sledi da je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f. $\Box$

Napomena 3.3.1 *Uslov da je f neprekidna funkcija u Teoremi 3.3.4 može se oslabiti uslovom da je $f^{n(x)}$ neprekidna funkcija u $x \in X$.*

Sledeći primer pokazuje da je uslov neprekidnosti funkcije $f^{n(u)}$ u tački u neophodan u Teoremi 3.3.4.

Primer 3.3.1 *Neka je $X = [0,1]$ sa uobičajenom metrikom. Definišimo preslikavanje $f : X \mapsto X$ tako da je*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{x}{2}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Primetimo da je

$$d(f^2x, f^2y) \leq \frac{1}{2} \cdot \max\{d(x,fy), d(x,fx)\},$$

za svako $x, y \in X$. Prema tome, funkcija f zadovoljava uslov (3.11) za $\alpha = \frac{1}{2}$. Međutim, f nema fiksnu tačku na X, i f^n nije neprekidna funkcija u 0 za svako $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Teorema Ray i Rhoadesa

U ovoj sekciji izlažemo rezultate Ray i Rhoadesa [116] koji se odnose na par preslikavanja koja zadovoljavaju sledeći kontraktivni uslov.

Neka su $f_1, f_2 : X \mapsto X$ preslikavanja metričkog prostora (X, d) tako da postoji q, $0 < q < 1$, i za svako $x, y \in X$ postoje prirodni brojevi $n(x)$ i $m(y)$ tako da je

$$d(f_1^{n(x)}x, f_2^{m(y)}y) \leq q \max\Big\{d(x,y),\ d(x, f_1^{n(x)}x),\ d(y, f_2^{m(y)}y), \frac{d(x, f_2^{m(y)}y) + d(y, f_1^{n(x)}x)}{2}\Big\}. \tag{3.12}$$

Teorema 3.4.1 *Neka su $f_1, f_2 : X \mapsto X$ preslikavanja kompletnog metričkog (X, d) koja zadovoljavaju uslov (3.12). Tada postoji jedinstvena tačka $a \in X$, koja zadovoljava uslov $f_1^{n(a)}(a) = f_2^{m(a)}(a) = a$.*

Napomena 3.4.1 *U iskazu ove teoreme u zadnjoj rečenici, navedena je korekcija iskaza teoreme iz [116], gde je omaškom naveden pogrešan zaključak da f_1 i f_2 imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku. Ovo je primetio Kasahara [60], što je ilustrovao sledećim primerom. Pored toga,on je izvršio korekciju zaključka u teoremi(zadnja rečenica) smatrajući da treba da bude napisano:Tada postoji jedinstvena tačka $a \in X$, koja zadovoljava uslov $f_1^{n(a)}(a) = f_2^{m(a)}(a)$. Mi smatramo da je korektna korekcija: Tada postoji jedinstvena tačka $a \in X$, koja zadovoljava uslov $f_1^{n(a)}(a) = f_2^{m(a)}(a) = a$.*

Primer 3.4.1 *(Kasahara [60]) Neka je $X = \{0, 1\}$, $d(x, y) = |y - x|$, $f_1 = f_2 = f : X \mapsto X$, $f(0) = 1$ i $f(1) = 0$. Izaberimo $n(x) = m(x)$ tako da je $n(0) = 2$ i $n(1) = 1$. Tada je $d(f^{n(x)}x, f^{m(y)}y) = 0$ za svako $x, y \in X$, međutim f nema fiksnu tačku.*

Dokaz teoreme: Neka je $x_0 \in X$. Definišimo niz (x_n) na sledeći način: $x_1 = f_1^{n(x_0)}x_0$, $x_2 = f_2^{m(x_1)}x_1, \ldots, x_{2n+1} = f_1^{n(x_{2n})}x_{2n}$, $x_{2n+2} = f_2^{m(x_{2n+1})}x_{2n+1}, \ldots$. Koristeći (3.12) i pretpostavku $x_m \neq x_n$ za svako $m \neq n$, dobijamo

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq q \max\Big\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{d(x_{2n}, x_{2n+2})}{2}\Big\}. \tag{3.13}$$

Ako pretpostavimo da je maksimum sa desne strane nejednakosti (3.13) jednak $d(x_{2n}, x_{2n+2})/2$, tada dobijamo

$$2d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq qd(x_{2n}, x_{2n+2}) \leq qd(x_{2n}, x_{2n+1}) + qd(x_{2n+1}, x_{2n+2}).$$

Sledi

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \frac{q}{2-q} \cdot d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq qd(x_{2n+1}, x_{2n+2}),$$

što je kontradikcija. Prema tome,

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq qd(x_{2n}, x_{2n+1}),$$

i analogno

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq qd(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Zato je

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq q^{2n} d(x_1, x_2)$$

i

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq q^{2n} d(x_0, x_1).$$

Neka je $r(x_0) = \max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}$. Za svako $m > n$, imamo

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{q^{2n}}{1-q^2} \cdot r(x_0).$$

Prema tome, (x_n) je Cauchyev niz, samim tim i konvergentan. Označimo njegovu graničnu vrednost sa p.

Iz (3.12) sledi

$$d(x_{2n+1}, f_2^{m(p)}p) \leq q \max\left\{ d(x_{2n}, p), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(p, f_2^{m(p)}p), \frac{d(x_{2n}, f_2^{m(p)}p) + d(p, x_{2n+1})}{2} \right\}. \tag{3.14}$$

Prelaskom na graničnu vrednost u (3.14), kad $n \to \infty$ dobijamo

$$d(p, f_2^{m(p)}p) \leq q \max\left\{ 0,\ 0,\ d(p, f_2^{m(p)}p),\ \frac{d(p, f_2^{m(p)}p)}{2} \right\}.$$

Sledi $p = f_2^{m(p)} p$, i analogno, $p = f_1^{n(p)} p$.

Pretpostavimo da postoji tačka $s \in X$, koja zadovoljava uslov $f_1^{n(s)}(s) = f_2^{m(s)}(s) = s$. Iz (3.12) sledi

$$d(p,s) = d(f_1^{n(p)} p, f_2^{m(s)} s) \le q \max\{d(p,s), 0, d(s,p)\},$$

te je $p = s$. $\square$

Posledica 3.4.1 *Neka je $f : X \mapsto X$ preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,d), tako da postoji q, $0 < q < 1$, i da za svako $x, y \in X$ postoji $n(x), n(y) \in \mathbb{N}$, tako da je*

$$d(f^{n(x)} x, f^{n(y)} y) \le q \max\Big\{ d(x,y), d(x, f^{n(x)} x), d(y, f^{n(y)} y), \frac{d(x, f^{n(y)} y) + d(y, f^{n(x)} x)}{2} \Big\}.$$

Tako postoji samo jedna tačka $p \in X$, tako da je $f^{n(p)}(p) = p$.

Dokaz: Iz Teoreme 3.4.1, kada uzmemo $f_1 = f_2$ i $m(y) = n(y)$. $\square$

3.5 Teorema Matkowskia

U oovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate Matkowskia [100] iz 1977. godine.

Za preslikavanje $\gamma : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ označimo sa γ^n, $n = 0, 1, \ldots$ n-tu iteraciju od γ. Pre nego pokažemo glavni rezultat pokazaćemo sledeću lemu.

Lema 3.5.1 *Pretpostavimo da je preslikavanje $\gamma : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ neopadajuće. Tada, za svako $t > 0$, iz $\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t) = 0$ sledi $\gamma(t) < t$.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoji $t_0 > 0$ tako da je $\gamma(t_0) > t_0$. Tada, zbog monotonosti preslikavanja γ, važi $\gamma^n(t_0) \ge t_0$ za $n = 1, \ldots$, te je $t_0 = 0$, što je kontradikcija. $\square$

Napomena 3.5.1 *Primetimo da za svako sa desne strane neprekidno preslikavanje $\gamma : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ za koje je $\gamma(t) < t$ za $t > 0$, sledi $\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t) = 0$. (videti Lemu 2.12.1.)*

Teorema 3.5.1 *(Matkowski [100]) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $f : X \mapsto X$, $\alpha : [0, \infty)^5 \mapsto [0, \infty)$, i $\gamma(t) = \alpha(t, t, t, 2t, 2t)$ za $t \geq 0$. Pretpostavimo da važi*

1^0 *α je neopadajuće preslikavanje u odnosu na svaku promenljivu,*

2^0 $\lim_{t\to\infty}(t - \gamma(t)) = \infty$,

3^0 $\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t) = 0$, $t > 0$,

4^0 *za svako $x \in X$, postoji pozitivan ceo broj $n = n(x)$, tako da je za svako $y \in X$,*

$$d(f^n x, f^n y) \leq \alpha(d(x, f^n x), d(x, f^n y), d(x, y), d(f^n x, y), d(f^n y, y)).$$

Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$, i za svako $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n x = u$.

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da je za svako $x \in X$, orbita $\{f^i x\}_{i=0}^{\infty}$ ograničen skup. Neka je $x \in X$, a s ceo broj tako da je $0 \leq s < n = n(x)$. Označimo sa

$$\begin{aligned} u_k &= d(x, f^{kn+s}x),\ k = 0, 1, \ldots \\ h &= \max\{u_0, d(x, f^n x)\}. \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke 2^0, postoji $c,\ c > h$, tako da je

$$t - \gamma(t) > h,\ t > c,$$

a na osnovu izbora broja c sledi $u_0 < c$. Pretpostavimo da postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da je $u_j \geq c$. Očigledno, možemo pretpostaviti $u_i < c$ za $i < j$. Koristći nejednakost trougla imamo

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^{(j-1)n+s}) &\leq d(x, f^n x) + u_{j-1} < 2u_j, \\ d(f^{jn+s}x, f^{(j-1)n+s}x) &\leq u_j + u_{j-1} < 2u_j. \end{aligned}$$

Sada, koristeći 4^0 i 1^0, dobijamo

$$\begin{aligned} u_j = d(x, f^{jn+s}x) &\leq d(f^n x, f^n f^{(j-1)n+s}x) + d(x, f^n x) \\ &\leq \alpha(u_j, u_j, u_j, 2u_j, 2u_j) + h = \gamma(u_j) + h, \end{aligned}$$

t.j. $u_j - \gamma(u_j) \leq h$ što sa $u_j > 0$ predstavlja kontradikciju u odnosu na izbor tačke c. Dakle, $u_j < c$, $j = 0, 1, \ldots$, pa je samim tim orbita $\{f^i x\}_{i=0}^{\infty}$ ograničena.

Neka je $x_0 \in X$ i $n_0 = n(x_0)$. Definišimo niz (x_k) na sledeći način

$$x_{k+1} = f^{n_k} x_k, \quad n_k = n(x_k), \; k = 0, 1, \ldots \tag{3.15}$$

Očigledno, (x_k) je podniz orbite $\{f^i x\}_{i=0}^{\infty}$. Pokazaćemo da je niz (x_k) Cauchyev.

Neka su $k, i \in \mathbb{N}$. Iz (3.15) dobijamo

$$x_{k+i} = f^{n_{k+i-1} + \ldots + n_k} x_k.$$

Ako uvedemo oznaku $s_0 = n_{k+i-1} + \ldots + n_k$, možemo pisati

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(x_k, f^{s_0} x_k).$$

Zbog jednostavnosti, uvedimo oznaku $t_i = d(x_{k-1}, f^i x_{k-1})$. Od brojeva s_0, n_{k-1}, $s_0 + n_{k-1}$ označimo sa s_1 onaj za koji t_{s_1} ima najveću vrednost. Koristeći nejednakost trougla, imamo

$$\begin{aligned} d(f^{n_{k-1}} x_{k-1}, f^{s_0} x_{k-1}) &\leq t_{n_{k-1}} + t_{s_0} \leq 2t_{s_1}, \\ d(f^{n_{k-1}+s_0} x_{k-1}, f^{s_0} x_{k-1}) &\leq t_{n_{k-1}+s_0} + t_{s_0} \leq 2t_{s_1}. \end{aligned}$$

Sada, iz 4^0 i 1^0 dobijamo

$$\begin{aligned} d(x_k, f^{s_0} x_k) &= d(f^{n_{k-1}} x_{k-1}, f^{n_{k-1}} f^{s_0} x_{k-1}) \\ &\leq \alpha(t_{s_1}, t_{s_1}, t_{s_1}, 2t_{s_1}, 2t_{s_1}) = \gamma(t_{s_1}), \end{aligned}$$

t.j.

$$d(x_k, f^{s_0} x_k) \leq \gamma(d(x_{k-1}, f^{s_1} x_{k-1})).$$

Ponavljajući ovu proceduru, možemo naći pozitivne cele brojeve s_j, $j = 1, \ldots, k-1$ tako da je

$$d(x_{k-j}, f^{s_j} x_{k-j}) \leq \gamma(d(x_{k-j-1}, f^{s_j+1} x_{k-j-1})).$$

Sada, zato što je γ neopadajuće preslikavanje, imamo

$$d(x_k, x_{k+i}) \leq \gamma^k(d(x_0, f^{s_k} x_0)) \leq \gamma^k(M),$$

gde je sa M označen diametar orbite $\{fx_0\}_{i=0}^{\infty}$. Na osnovu pretpostavke 3^0, imamo $\lim_{k\to\infty} \gamma^k(M) = 0$. Ovim je dokazano da je niz (x_k) Cauchyev niz.

Kako je metrički prostor X kompletan, postoji $u \in X$, tako da je $\lim_{k\to\infty} x_k = u$. Sada ćemo pokazati da za $n = n(u)$ imamo $f^n u = u$.

Pretpostavimo da je $\varepsilon = d(f^n u, u) > 0$. Koristeći prethodni deo dokaza, imamo

$$\lim_{k\to\infty} d(f^n x_k, x_k) = 0.$$

Prema tome, na osnovu Leme 3.5.1, sledi postoji k_0 tako da je

$$d(u, x_k) \leq \frac{1}{4}(\varepsilon - \gamma(\varepsilon)),\ d(f^n x_k, x_k) \leq \frac{1}{4}(\varepsilon - \gamma(\varepsilon)),\ k \geq k_0.$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned}\varepsilon = d(f^n u, u) &\leq d(f^n u, f^n x_k) + d(f^n x_k, x_k) + d(x_k, u)\\ &\leq \alpha(d(u, f^n u), d(u, f^n x_k), d(u, x_k), d(f^n u, x_k), d(f^n x_k, x_k)) + \frac{1}{2}(\varepsilon - \gamma(\varepsilon)).\end{aligned}$$

Kako je

$$d(u, f^n x_k) \leq d(u, x_k) + d(x_k, f^n x_k) \text{ i } d(f^n u, x_k) \leq d(f^n u, u) + d(u, x_k),$$

za $k \geq k_0$ imamo

$$d(u, f^n x_k) \leq \frac{1}{2}(\varepsilon - \gamma(\varepsilon)) < \varepsilon,\ d(f^n u, x_k) \leq 2\varepsilon.$$

Koristeći uslov 1^0 imamo

$$\varepsilon \leq \alpha(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon) + \frac{1}{2}(\varepsilon - \gamma(\varepsilon)) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \gamma(\varepsilon)) < \varepsilon,$$

što je kontradikcija. Prema tome, $f^n u = u$.

Pretpostavimo da preslikavanje f^n ima još jednu fiksnu tačku $v \in X$, $v \neq u$. Tada je $f^n v = v$ za $n = n(u)$. Na osnovu 4^0 i Leme 3.5.1 je

$$\begin{aligned}d(u, v) = d(f^n u, f^n v) &\leq \alpha(0, d(u, v), d(u, v), d(u, v), 0)\\ &\leq \gamma(d(u, v)) < d(u, v).\end{aligned}$$

Prema tome, u je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f^n.

Iz $fu = f^n fu$, i prethodno pokazane jedinstvenosti fiksne tačke zaključujemo da je $fu = u$. Lako se pokazuje jedinstvenost fiksne tačke preslikavanja f.

Dokažimo ostali deo teoreme. Neka je $x \in X$, a s ceo broj tako da je $0 \leq s < n = n(u)$ i

$$u_k = d(u, f^{kn+s}x), \; k = 0, 1, \ldots$$

Pretpostavimo da postoji k takvo da je $u_k > u_{k-1}$. Tada, koristeći 4^0, 1^0, 3^0, i Lemu 3.5.1 imamo

$$\begin{aligned} u_k &= d(f^n u, f^n f^{(k-1)n+s}x) \\ &\leq \alpha(0, u_k, u_{k-1}, u_{k-1}, d(f^{kn+s}x, f^{(k-1)n+s}x)) \\ &\leq \alpha(u_k, u_k, u_k, u_k, 2u_k) \leq \gamma(u_k) < u_k. \end{aligned}$$

Na osnovu dobijene kontradikcije, sledi $u_k \leq u_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Koristeći 4^0 i 1^0 dobijamo

$$u_k = d(f^n u, f^{kn+s}x) \leq \alpha(u_{k-1}, u_{k-1}, u_{k-1}, u_{k-1}, 2u_{k-1}) \leq \gamma(u_{k-1})$$

za $k = 1, 2, \ldots$. Prema tome, $u_k \leq \gamma^k(u_0)$, a iz uslova 3^0 sledi $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$. $\square$

Napomena 3.5.2 *Primetimo, da u Teoremi 3.5.1 nismo pretpostavili neprekidnost preslikavanja f.*

Jednostavna posledica Teoreme 3.5.1 je sledeća teorema.

Teorema 3.5.2 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $f : X \mapsto X$ i $\gamma : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$. Ako je γ neopadajuće preslikavanje, $\lim_{t\to\infty}(t - \gamma(t)) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} \gamma^k(t) = 0$ za $t > 0$, i ako za svako $x \in X$ postoji pozitivan ceo broj $n = n(x)$ tako da je za svako $y \in X$,*

$$d(f^n x, f^n y) \leq \gamma(d(x, y)),$$

tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$. Šta više, za svako $x \in X$ je $\lim_{k\to\infty} f^k x = u$.

Napomena 3.5.3 *Ako u Teoremi 3.5.2 uzmemo $\gamma(t) = \lambda t$, $0 < \lambda < 1$, dobijamo teoremu M. Sehgala [134].*

Za $\alpha(t_1, \ldots, t_5) = at_1 + bt_2 + ct_3 + bt_4 + at_5$, Teorema 3.5.1 glasi:

Teorema 3.5.3 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \mapsto X$ preslikavanje koje zadovoljava sledeći uslov: za svako $x \in X$ postoji pozitivan ceo broj $n = n(x)$ takav da je za svako $y \in X$*

$$d(f^n x, f^n y) \leq a[d(x, f^n x) + d(y, f^n y)] + b[d(x, f^n y) + d(f^n x, y)] + cd(x, y)$$

gde su a, b, c nenegativni brojevi za koje važi $3a + 3b + c < 1$. Tada, preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku $u \in X$. Šta više, za svako $x \in X$ je $\lim_{k\to\infty} f^k x = u$.

Napomena 3.5.4 *Guseman [59] je pokazao da je u radu Sehgala [134] uslov neprekidnosti suvišan. Takođe, dao je interesantne preformulacije Sehgalovih rezultata.*

Primer 3.5.1 *Neka je $X = [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$, $fx = \frac{x}{1+x}$, $\gamma(t) = \frac{t}{1+t}$ za $x, y, t \in [0, \infty)$. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{1 + nt} = 0 \text{ za } t \geq 0, \ \lim_{t\to\infty} (t - \gamma(t)) = \infty$$

i

$$d(fx, fy) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right| = \frac{|x - y|}{(1 + x)(1 + y)} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \gamma(d(x, y)).$$

Svi uslovi Teoreme 3.5.2 su ispunjeni, ali to nije slučaj sa Teoremom 3.5.3. Da bismo ovo pokazali, pretpostavimo da postoje nenegativni brojevi a, b, c koji zadovoljavaju uslove Teoreme 3.5.3. Tada, za $x = 0$ imamo

$$\frac{y}{1 + ny} \leq a\left(y - \frac{y}{1 + ny}\right) + b\left(\frac{y}{1 + ny} + y\right) + cy, \ n = n(0), \ y > 0.$$

Odavde je $(a + b + c)/(1 - a + b) \geq 1/(1 + ny)$ za $y > 0$, pa je $2b + c \geq 1$. Ova kontradikcija pokazuje da je Teorema 3.5.1 opštija od rezultata datih u [59], i [134].

Glava 4

Uopštenja kontraktivnih preslikavanja

U onoj glavi izloženi su i originalni rezultati autora. U njima se izučavaju fiksne tačke preslikavanja na prostorima koji uopštavaju metričke prostore, tj., na konusnim metričkim prostorima, prostorima sa $w-$rastojanjem i parcijalnim metričkim prostorima.

4.1 Konusni metrički prostori

Huang i Zhang [70] su definisali konusni metrički prostor, tako što su u definiciji metrike zamenili polje realnih brojeva sa Banachovim prostorom. Dokazali su rezultate koji se odnose na postojanje fiksne tačke kontraktivnih preslikavanja na konusnim metričkim prostorima. U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz pomenutog rada [70].

Neka je E realan Banachov prostor i P podskup od E. Tada je P konus u E ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) P je zatvoren, neprazan i $P \neq \{0\}$;

(ii) $a, b \in R$, $a, b \geq 0$, $x, y \in P \quad \Longrightarrow \quad ax + by \in P$;

(iii) $P \bigcap (-P) = \{0\}$.

Za dati konus $P \subset E$, definišimo parcijalno uređenje $\leq$ u odnosu na P na sledeći način:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in P.$$

Tada je $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$; Takođe je $x \ll y$ ako je $y - x \in \operatorname{int} P$, gde je $\operatorname{int} P$ unutrašnjost skupa P.

Konus P je normalan ako postoji broj $K > 0$ takav da za svako $x, y \in E$,

$$0 \leq x \leq y \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq K\|y\|.$$

Najmanji pozitivan broj K koji zadovoljava prethodni uslov naziva se normalna konstanta konusa P. Očigledno je $K \geq 1$.

Konus P se regularan ako je svaki rastući i ograničen odozgo niz konvergentan. To znači, ako je $\{x_n\}$ niz koji zadovoljava uslov

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y$$

za neko $y \in E$, tada postoji $x \in E$ tako da je $\|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$. Može se pokazati da je konus P je regularan ako i samo ako je svaki opadajući niz ograničen odozdo konvergentan. Poznato je da je regularan konus istovremeno i normalan.

Nadalje ćemo pretpostavljati da je E Banachov prostor, P konus u E takav da je $P \neq \emptyset$ i $\leq$ parcijalno uredjenje na P.

Definicija 4.1.1 *Neka je X neprazan skup. Pretpostavimo da preslikavanje $d : X \times X \mapsto E$ zadovoljava sledeće uslove:*

(d1) $0 < d(x, y)$, *za svako* $x, y \in X$ *i* $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$;

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$, *za svako* $x, y \in X$;

(d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *za svako* $x, y, z \in X$.

Tada se d naziva konusna metrika na X, a (X, d) konusni metrički prostor.

Poznato je da je klasa konusnih metričkih prostora šira od klase metričkih prostora [118].

Primer 4.1.1 *Neka je* $E = \ell^1, P = \left\{\{x_n\}_{n\geq 1} \in E : x_n \geq 0,\ za\ svako\ n\right\}$, (X, ρ) *metrički prostor i* $d : X \times X \mapsto E$ *preslikavanje definisano sa* $d(x, y) = \left\{\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$. *Tada je* (X, d) *konusni metrički prostor.*

Primer 4.1.2 *Neka je* $X = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^n$ *i* $P = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$. *Lako je pokazati da je* $d : X \times X \mapsto E$ *preslikavanje definisano sa* $d(x, y) = (|x - y|, k_1|x - y|, \ldots, k_{n-1}|x - y|)$ *konusna metrika na* X, *gde je* $k_i \geq 0$ *za svako* $i \in \{1, ..., n - 1\}$.

Primer 4.1.3 *Neka je* $E = C^1_{\mathbb{R}}([0, 1])$ *sa normom* $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. *Konus* $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ *nije normalan konus.*

To sledi iz sledeće činjenice: neka je $k \geq 1$, $f(x) = x$ *i* $g(x) = x^{2k}$. *Tada je* $0 \leq g \leq f$, $\|f\| = 2$ *i* $\|g\| = 2k + 1$. *Kako je* $k \cdot \|f\| \leq \|g\|$, *sledi* k *nije normalna konstanta za* P. *Prema tome, konus* P *nije normalan konus.*

Za skup $F \subset E$, definišimo

$$\delta(F) = \sup\{\|x\| : x \in F\}.$$

Definicija 4.1.2 *Neka je* (X, d) *konusni metrički prostor,* $\{x_n\}$ *niz u* X *i* $x \in X$. *Ako za svako* $c \in E$, $0 \ll c$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da za svako* $n > n_0, d(x_n, x) \ll c$, *tada je niz* $\{x_n\}$ *konvergentan pri čemu* x_n *konvergira ka* x, *što označavamo na uobičajeni način* $\lim_n x_n = x$, *ili* $x_n \to x$, $(n \to \infty)$.

Lema 4.1.1 *Neka je* (X, d) *konusni metrički prostor,* P *normalan konus sa normalnom konstantom* K. *Neka je* $\{x_n\}$ *niz u* X. *Tada* $\{x_n\}$ *konvergira ka* x *ako i samo ako* $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$.

Dokaz: Pretpostavimo da $\{x_n\}$ konvergira ka x. Za svako realno $\varepsilon > 0$, izaberimo $c \in E$ tako da je $0 \ll c$ i $K\|c\| < \varepsilon$. Tada postoji n_0, tako da za svako $n > n_0$, $d(x_n, x) \ll c$. Dakle, za $n > n_0$ važi $\|d(x_n, x)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$. To znači $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$.

Obrnuto, pretpostavimo da $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. Za $c \in E$, $0 \ll c$, postoji $\delta > 0$, tako da $\|x\| < \delta$ implicira $c - x \in \operatorname{int} P$. Za to δ postoji n_0, tako da za $n > n_0$ $\|d(x_n, x)\| < \delta$. Dakle, $c - d(x_n, x) \in \operatorname{int} P$. To znači $d(x_n, x) \ll c$. Dakle, $\{x_n\}$ konvergira ka x. $\Box$

Lema 4.1.2 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Neka je $\{x_n\}$ niz u X. Ako $\{x_n\}$ konvergira ka x i $\{x_n\}$ konvergira ka y, tada je $x = y$, tj. limes niza $\{x_n\}$ je jedinstven.*

Dokaz: Za svako $c \in E$, $0 \ll c$, postoji n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi $d(x_n, x) \ll c$ i $d(x_n, y) \ll c$. Prema tome,

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \leq 2c.$$

Odavde je $\|d(x, y)\| \leq 2K\|c\|$. Pošto je c proizvoljno sledi da je $d(x, y) = 0$, tj. $x = y$. $\square$

Definicija 4.1.3 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor i $\{x_n\}$ niz u X. Ako za svako $c \in E$ za koje je $0 \ll c$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n, m > n_0, d(x_n, x_m) \ll c$, tada kažemo da je $\{x_n\}$ Cauchyev niz u X.*

Definicija 4.1.4 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor. Ako je svaki Cauchyev niz u X konvergentan, prostor X je kompletan konusni metrički prostor.*

Lema 4.1.3 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor i $\{x_n\}$ niz u X. Ako $\{x_n\}$ konvergira ka x, tada je $\{x_n\}$ Cauchyev niz.*

Dokaz: Za svako $c \in E$, $0 \ll c$, postoji n_0 tako da je za svako $n, m > n_0, d(x_n, x) \ll c/2$ i $d(x_m, x) \ll c/2$. Odatle je

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \ll c.$$

Dakle, $\{x_n\}$ je Cauchyev niz. $\square$

Lema 4.1.4 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Neka je $\{x_n\}$ niz u X. Dati niz je Cauchyev ako i samo ako $d(x_n, x_m) \to 0$, $n, m \to \infty$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ Cauchyev niz. Za svako $\varepsilon > 0$, izaberimo $c \in E$, $0 \ll c$ tako da je $K\|c\| < \varepsilon$. Tada postoji n_0 tako da za svako $n, m > n_0$, važi $d(x_n, x_m) \ll c$, te je $\|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$. Odavde $d(x_n, x_m) \to 0$, $n, m \to \infty$.

Pokažimo lemu u drugom smeru. Pretpostavimo da $d(x_n, x_m) \to 0$, $n, m \to \infty$. Za $c \in E$, $0 \ll c$ postoji $\delta > 0$, dako da $\|x\| < \delta$ implicira $c - x \in \operatorname{int} P$. Za takvo δ postoji n_0, tako da za svako $n, m > n_0$ važi $\|d(x_n, x_m)\| < \delta$. Dakle, $c - d(x_n, x_m) \in \operatorname{int} P$. To znači da je $d(x_n, x_m) \ll c$, odnosno $\{x_n\}$ je Cauchyev niz. $\square$

Lema 4.1.5 *Neka je (X,d) konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Neka su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ nizovi iz X i neka $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$. Tada*

$$d(x_n, y_n) \to d(x,y), \ n \to \infty.$$

Dokaz: Za svako $\varepsilon > 0$, izaberimo $c \in E$, tako da je $0 \ll c$ i $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4K+2}$. Iz $x_n \to x$ i $y_n \to y$, sledi postoji n_0 tako da za svako $n > n_0$ sledi $xd(x_n, x) \ll c$ i $d(y_n, y) \ll c$. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y_n, y) \leq d(x,y) + 2c, \\ d(x,y) &\leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + 2c. \end{aligned}$$

Odatle je

$$0 \leq d(x,y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c$$

i

$$\|d(x_n, y_n) - d(x,y)\| \leq \|d(x,y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\| \leq (4K+2)\|c\| < \varepsilon$$

Dakle, $d(x_n, y_n) \to d(x,y), \ n \to \infty$. □

Definicija 4.1.5 *Neka je (X,d) konusni metrički prostor. Ako za svaki niz $\{x_n\}$ u X, postoji podniz $\{x_{n_i}\}$ koji konvergira u X, tada se X naziva sekvencijalno kompaktan konusni metrički prostor.*

4.1.1 Preslikavanja kontraktivnog tipa

U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate Huang i Zhang [70] koji se odnose na fiksne tačke preslikavanja kontraktivnog tipa na konusnim metričkim prostorima.

Teorema 4.1.1 *Neka je (X,d) kompletan konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Pretpostavimo da preslikavanje $T : X \mapsto X$ zadovoljava kontraktivan uslov*

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x,y), \quad \textit{za svako } x, y \in X,$$

gde je $k \in [0,1)$ konstanta. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tčku u X, i za svako $x \in X$, iterativni niz $\{T^n x\}$ konvergira ka toj fiksnoj tački.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$, i

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x, \ldots$$

Tada je

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k\, d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq k^n\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Za $n > m$, imamo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m)\, d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k}\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Prema tome

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|,$$

i sledi $d(x_n, x_m) \to 0,\ n, m \to \infty$. Zato je $\{x_n\}$ je Cauchyev niz. Zbog kompletnosti prostora X, postoji $x^* \in X$ tako da $x_n \to x^*$, $n \to \infty$. Iz

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*),$$

sledi

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*\|) \to 0,$$

odakle je $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$. Prema tome $Tx^* = x^*$, tj., x^* je fiksna tačka preslikavanja T. Pokažimo njenu jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji još jedna fiksna tačka y^* preslikavanja T. Tada je

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k\, d(x^*, y^*).$$

Odavde je $\|d(x^*, y^*)\| = 0$ i $x^* = y^*$. Time smo pokazali jedinstvenost fiksne tačke. $\square$

Posledica 4.1.1 *Neka je (X, d) kompletan konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Za $c \in E$, $0 \ll c$ i $x_0 \in X$, neka je $B(x_0, c) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq c\}$. Pretpostavimo da preslikavanje $T : X \mapsto X$ zadovoljava kontraktivan uslov*

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y), \ \textit{za svako } x, y \in B(x_0, c),$$

gkde je $k \in [0, 1)$ konstanta i $d(Tx_0, x_0) \leq (1 - k)c$. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku u $B(x_0, c)$.

Dokaz: Dokažimo da je $B(x_0, c)$ kompletan konusni metrički prostor i da $Tx \in B(x_0, c)$ za svako $x \in B(x_0, c)$.

Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ Cauchyev niz iz $B(x_0, c)$. Tada je $\{x_n\}$ ujedno i Cauchyev niz u X. Zbog kompletnosti prostora X, postoji $x \in X$ tako da $x_n \to x$, $n \to \infty$. Sada imamo

$$d(x_0, x) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, x) \leq d(x_n, x) + c.$$

Iz $x_n \to x$ sledi $d(x_n, x) \to 0$. Prema tome $d(x_0, x) \leq c$, odnosno $x \in B(x_0, c)$. Dokazano je da je $B(x_0, c)$ kompletan konusni metrički prostor. Za svako $x \in B(x_0, c)$ je

$$d(x_0, Tx) \leq d(Tx_0, x_0) + d(Tx_0, Tx) \leq (1-k)c + kd(x_0, x) \leq (1-k)c + kc = c.$$

Prema tome, $Tx \in B(x_0, c)$. $\square$

Posledica 4.1.2 *Neka je (X, d) kompletan konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Pretpostavimo da za neki pozitivan ceo broj n, preslikavanje $T : X \mapsto X$ zadovoljava uslov*

$$d(T^n x, T^n y) \leq k\, d(x, y), \ \textit{za svako } x, y \in X,$$

gkde je $k \in [0, 1)$ konstanta. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku u X.

Dokaz: Iz Teoreme 4.1.1, T^n ima jedinstvenu fiksnu tačku x^*. Ali, $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$, te je Tx^* takođe fiksna tačka za T^n. Dakle, $Tx^* = x^*$, odnosno x^* je fiksna tačka za T. Kako je fiksna tačka za T ujedno fiksna tačka za T^n, sledi T ima jedinstvenu fiksnu tačku. $\square$

Teorema 4.1.2 *Neka je (X, d) sekvencijalno kompaktan konusni metrički prostor i P regularan konus. Pretpostavimo da preslikavanje $T : X \mapsto X$ zadovoljava kontraktivan uslov*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \ \textit{za svako } x, y \in X, \ x \neq y.$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$, i $x_1 = Tx_0, \ x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0, \ldots$. Ako je za neko n, $x_{n+1} = x_n$, tada je x_n fiksna tačka za T, čime je teorema dokazana. Pretpostavimo da je za svako n, $x_{n+1} \neq x_n$. Neka je $d_n = d(x_n, x_{n+1})$. Tada je

$$d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}) = d_n.$$

Prema tome, $\{d_n\}$ je opadajući niz ograničen odozdo nulom. Zato što je P regularan konus, postoji $d^* \in E$ tako da $d_n \to d^*$, $n \to \infty$. Kako je X sekvencijalno kompaktan, sledi postoji podniz $\{x_{n_i}\}$ niza $\{x_n\}$ i $x^* \in X$ tako da $x_{n_i} \to x^*$, $i \to \infty$. Sada je

$$d(Tx_{n_i}, Tx^*) \leq d(x_{n_i}, x^*),\ i = 1, 2, \ldots$$

Tada je

$$\|d(Tx_{n_i}, Tx^*)\| \leq K\|d(x_{n_i}, x^*)\| \to 0,\ i \to \infty.$$

gde je K normalna konstanta konusa P. Odatle, $Tx_{n+1} \to Tx^*$, $i \to \infty$. Analogno, $T^2x_{n_i} \to T^2x^*$, $i \to \infty$. Na osnovu Leme 4.1.5, dobijamo

$$d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) \to d(Tx^*, x^*),\ i \to \infty \text{ i } d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) \to d(T^2x^*, Tx^*),\ i \to \infty.$$

Očigledno

$$d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) = d_{n_i} \to d^* = d(Tx^*, x^*),\ i \to \infty.$$

Sada ćemo pokazati da je $Tx^* = x^*$. Iz $Tx^* \neq x^*$, sledi $d^* \neq 0$. Sada je

$$d^* = d(Tx^*, x^*) > d(T^2x^*, Tx^*) = \lim_{i\to\infty} d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} d_{n_i+1} = d^*.$$

Dobili smo kontradikciju, i sledi $Tx^* = x^*$. Prema tome, x^* je fiksna tačka preslikavanja T. Jedinstvenost sledi očigledno. □

Teorema 4.1.3 *Neka je (X, d) kompletan konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Pretpostavimo da preslikavanje $T : X \mapsto X$ zadovoljava kontraktivan uslov*

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, x) + d(Ty, y)),\ \text{za svako } x, y \in X,$$

gde je $k \in [0, \frac{1}{2})$ konstanta. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku u X, i za svako $x \in X$, iterativni niz $\{T^n x\}$ konvergira ka toj fiksnoj tački.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$, i $x_1 = Tx_0$, $x_2 \in Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \ldots$. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Odavde je

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h\, d(x_n, x_{n-1}),$$

gde je $h = \frac{k}{1-k}$. Za $n > m$ je

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \ldots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|.$$

Sledi $d(x_n, x_m) \to 0,\ n, m \to \infty$, te je $\{x_n\}$ Cauchyev niz. Zbog kompletnosti prostora X, postoji $x^* \in X$ tako da $x_n \to x,\ n \to \infty$. Sada je

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*), \end{aligned}$$

odnosno

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k}(kd(Tx_n, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)).$$

Sledi

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k}(k(\|d(x_{n+1}, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0.$$

Odavde dobijamo $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$, tj., $Tx^* = x^*$. Prema tome, x^* je fiksna tačka preslikavanja T.

Pretpostavimo da preslikavanje T ima još jednu fiksnu tačku y^*. Iz

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)) = 0,$$

dobijamo $x^* = y^*$. Sledi preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku. □

Teorema 4.1.4 *Neka je (X, d) kompletan konusni metrički prostor, a P normalan konus sa normalnom konstantom K. Pretpostavimo da preslikavanje $T : X \mapsto X$ zadovoljava kontraktivan uslov*

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, y) + d(Ty, x)), \text{ za svako } x, y \in X,$$

gde je $k \in [0, \frac{1}{2})$ konstanta. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku u X, i za svako $x \in X$, iterativni niz $\{T^n x\}$ konvergira ka toj fiksnoj tački.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$, i $x_1 = Tx_0$, $x_2 \in Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \ldots$. Tada je

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k(d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Odavde je

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h\, d(x_n, x_{n-1}),$$

gde je $h = \frac{k}{1-k}$. Za $n > m$ je

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \ldots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Sledi

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|,$$

odnosno $d(x_n, x_m) \to 0,\ n, m \to \infty$. Prema tome, $\{x_n\}$ je Cauchyev niz, a kako je X kompletan konusni metrički prostor, postoji $x^* \in X$ tako da $x_n \to x^*,\ n \to \infty$. Sada je

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq k(d(Tx^*, x_n) + d(Tx_n, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq k(d(Tx^*, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*), \end{aligned}$$

odnosno

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k}(k(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*)).$$

Sledi

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k}(k(\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0.$$

Odavde dobijamo $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$, tj., $Tx^* = x^*$. Dakle, x^* je fiksna tačka preslikavanja T.

Pretpostavimo da preslikavanje T ima još jednu fiksnu tačku y^*. Iz

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, y^*) + d(Ty^*, x^*)) = 2kd(x^*, y^*),$$

dobijamo $d(x^*, y^*) = 0$, tj. $x^* = y^*$. Prema tome, preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku. □

Napomena 4.1.1 *Teoreme 4.1.1 - 4.1.4 uopštavaju teoreme za kontraktivna preslikavanja metričkih prostora na konusne metričke prostore.*

Primer 4.1.4 *Neka je* $E = \mathbb{R}^2$*, Euklidova ravan i* $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ *normalan konus u* E*. Neka je*

$$X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Definišimo preslikavanje $d : X \times X \mapsto E$ *na sledeći način*

$$\begin{aligned}
d((x,0),(y,0)) &= \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|\right), \\
d((0,x),(0,y)) &= \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|\right), \\
d((x,0),(o,y)) &= d((0,y),(x,0)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y\right).
\end{aligned}$$

Prostor (X,d) *je kompletan konusni metrički prostor.*

Definišimo preslikavanje $T : X \mapsto X$ *sa*

$$T((x,0)) = (0,x) \ \ i \ \ T((0,x)) = \left(\frac{1}{2}x, 0\right).$$

Tada preslikavanje T *za svako* $(x_1,x_2),\ (y_1,y_2) \in X$ *zadovoljava uslov*

$$d(T((x_1,x_2)), T((y_1,y_2))) \leq k\, d((x_1,x_2),(y_1,y_2)),$$

sa konstantom $k = \frac{3}{4} \in [0,1)$*.*

Očigledno je da T ima jedinstvenu fiksnu tačku $(0,0) \in X$. Može se pokazati da T nije kontraktivno preslikavanje na X sa Euklidovom metrikom. $\square$

4.1.2 Kvazi-kontrakcija

U ovom poglavlju izlažemo pojedine rezultate iz rada Ilića i Rakočevića [74], a odnose se na proučavanje kvazi-kontrakcije na konusnim metričkim prostorima. Dokazaćemo teoremu o fiksnoj tački za kvazi-kontrakciju na konusnim metričkim prostorima. Na taj način uopštavaju se analogni rezultati Huanga i Zhanga i rezultati Ćirića.

Definicija 4.1.6 *Neka je* (X, d) *konusni metrički prostor. Preslikavanje* $f : X \mapsto X$ *za koje postoji konstanta* $\lambda \in (0, 1)$ *za koju za svako* $x, y \in X$, *postoji*

$$u \in C(f, x, y) \equiv \Big\{ d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx) \Big\},$$

tako da je

$$d(fx, fy) \leq \lambda \cdot u, \tag{4.1}$$

naziva se kvazi-kontrakcija na konusnim metričkim prostorima.

Za $f : X \mapsto X$ i $n \in \mathbb{N}$, uvedimo sledeće oznake:

$$O(x; n) = \Big\{ x, fx, f^2x, ..., f^nx \Big\},$$

i

$$O(x; \infty) = \Big\{ x, fx, f^2x, ... \Big\}.$$

Sledeći rezultat predstavlja pomoćno tvrđenje koje ćemo koristiti pri dokazu glavnog rezultata ovog poglavlja(Teorema 4.1.5).

Lema 4.1.6 *Neka je* (X, d) *konusni metrički prostor i* P *normalan konus. Neka je* $f : X \mapsto X$ *kvazi-kontrakcija. Tada, postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je za svako* $n > n_0$,

$$\delta(O(x; n)) = \max \Big\{ \Big\| d(x, f^l x) \Big\|, \Big\| d(f^i x, f^j x) \Big\| : 1 \leq l \leq n, 1 \leq i, j \leq n_0 \Big\} \tag{4.2}$$

i

$$\begin{aligned} \delta(O(x, \infty)) \leq \max \Big\{ & \lambda K \delta(O(x; n_0)),\ \Big\| d(x, f^l x) \Big\| :\ 1 \leq l \leq n_0, \\ & \frac{K}{1 - K^2 \lambda^{n_0}} \Big\| d(x, f^{n_0+1} x) \Big\| \Big\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dokaz: Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\max\{\lambda^{n_0} K, \lambda^{n_0} K^2\} < 1$. Izaberimo $i, j \in \mathbb{N}$ tako da je $n_0 < i < j \leq n$. Tada postoji $s_1 \in C(f, f^{i-1}x, f^{j-1}x)$ za koje je

$$d(f^i x, f^j x) \leq \lambda \cdot s_1.$$

Šta više, postoji $s_2 \in \{d(a,b) : a, b \in O(x;n)\}$ tako da je $s_1 \leq \lambda s_2$. Dakle,

$$d(f^i x, f^j x) \leq \lambda^2 s_2.$$

Odavde zaključujemo da je

$$d(f^i x, f^j x) \leq \lambda^{n_0} s_{n_0},$$

za neko $s_{n_0} \in \{d(a,b) : a, b \in O(x;n)\}$. Prema tome,

$$\|d(f^i x, f^j x)\| \leq \lambda^{n_0} \cdot K \|s_{n_0}\| < \|s_{n_0}\| \leq \delta(O(x;n)).$$

Odavde, (4.2) sledi direktno.

Da bi dokazali (4.3), primetimo da je za $1 \leq i < j \leq n_0$,

$$d(f^i x, f^j x) \leq \lambda s_1,$$

za neko $s_1 \in \{d(a,b) : a, b \in O(x;n_0)\}$. Zato je

$$\|d(f^i x, f^j x)\| \leq \lambda K \delta(O(x;n_0)).$$

Ako je $\delta(O(x,n)) = \|d(f^i x, f^j x)\|$, za neko $1 \leq i < j \leq n_0$, tada je

$$\delta(O(x;n)) \leq \lambda K \delta(O(x;n_0)).$$

Osim toga, za $n_0 < l \leq n$

$$d(x, f^l x) \leq d(x, f^{n_0+1} x) + d(f^{n_0+1} x, f^l x),$$

sledi

$$\|d(x, f^l x)\| \leq K \|d(x, f^{n_0+1} x)\| + \lambda^{n_0} K^2 \delta(O(x;n)).$$

Ako je $\delta(O(x;n)) = \|d(x, f^l x)\|$, za neko $n_0 < l \leq n$, tada je

$$\delta(O(x;n)) \leq \frac{K}{1 - \lambda^{n_0} K^2} \cdot \left\| d(x, f^{n_0+1} x) \right\|,$$

čime je pokazano (4.3). $\square$

Teorema 4.1.5 *Neka je (X,d) kompletan konusni metrički prostor i P normalan konus. Pretpostavimo da je preslikavanje $f : X \mapsto X$ kvazi-kontrakcija i $K \neq \lambda^{-1}$. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku u X i za svako $x \in X$, iterativni niz $\{f^n x\}$ konvergira ka toj fiksnoj tački.*

Dokaz: Neka je $x \in X$. Pokazaćemo da je $\{f^n x\}$ Cauchyev niz. Imamo da je

$$d(f^n x, f^{n-1}x) \leq \lambda s_{n,n-1},$$

gde je

$$s_{n,n-1} \in \Big\{d(f^n x, f^{n-1}x), d(f^n x, f^{n-2}x), d(f^{n-1}x, f^{n-2}x)\Big\}.$$

Osim toga,

$$d(f^n x, f^{n-2}x) \leq \lambda s_{n,n-2},$$

za

$$s_{n,n-2} \in \Big\{d(f^n x, f^{n-1}x), d(f^n x, f^{n-3}x), d(f^{n-1}x, f^{n-2}x), \\ d(f^{n-1}x, f^{n-3}x), d(f^{n-2}x, f^{n-3}x)\Big\},$$

i

$$d(f^{n-1}x, f^{n-2}x) \leq \lambda s_{n-1,n-2},$$

za $s_{n-1,n-2} \in \Big\{d(f^{n-1}x, f^{n-2}x), d(f^{n-1}x, f^{n-3}x),\ d(f^{n-2}x, f^{n-3}x)\Big\}$.

Dakle,

$$d(f^n x, f^{n-1}x) \leq \lambda^2 s^{(2)}_{n,n-1},$$

gde je $s^{(2)}_{n,n-1}$ element skupa $\Big\{d(f^n x,\ f^{n-1}x),\ d(f^n x, f^{n-2}x),\ d(f^n x, f^{n-3}x), d(f^{n-1}x, f^{n-2}x),\ d(f^{n-1}x, f^{n-3}x), d(f^{n-2}x, f^{n-3}x)\Big\}$.

Nastavljajući dati postupak, posle $n-1$ koraka dobijamo

$$d(f^n x, f^{n-1}x) \leq \lambda^{n-1} s^{(n-1)}_{n,n-1}, \tag{4.4}$$

gde je $s^{(n-1)}_{n,n-1}$ element skupa $\cup_{j=0}^{n-1} \cup_{i=j+1}^{n} \{d(f^{n-j}x, f^{n-i}x)\}$.

Prema tome, za $m > n$, imamo

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^m x) &\leq d(f^n x, f^{n+1}x) + d(f^{n+1}x, f^{n+2}x) + ... + d(f^{m-1}x, f^m x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-n-1} d(f^{n+k}x, f^{n+k+1}x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} s^{(n+k)}_{n+k+1,n+k}. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}\Big\|d(f^n x, f^m x)\Big\| &\leq K\lambda^n \Big\| \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^k s_{n+k+1,n+k}^{(n+k)} \Big\| \\ &\leq K \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \delta(O(x,\infty)),\end{aligned}$$

te je $\{f^n x\}$ Cauchyev niz. Dakle, postoji $y \in X$ tako da je $\lim_{n\to\infty} f^n x = y$.

Za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji

$$s_n \in \{d(f^n x, y), d(f^{n+1}x, y), d(f^{n+1}x, f^n x), d(fy, f^n x), d(fy, y)\},$$

tako da je

$$d(y, fy) \leq d(y, f^{n+1}x) + d(f^{n+1}x, fy) \leq d(y, f^{n+1}x) + \lambda s_n. \tag{4.5}$$

Očigledno su elementi niza $\{s_n\}$ oblika $d(f^n x, y)$, $d(f^{n+1}x, y)$, $d(f^n x, f^{n+1}x)$, $d(f^n x,\ fy)$ ili $d(fy, y)$. Konstruisaćemo podniz $\{s_{n,i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, niza $\{s_n\}$, tako da su elementi podniza $\{s_{n,i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, oblika, $d(f^n x, y)$, $d(f^{n+1}x, y)$, $d(f^n x, f^{n+1}x)$, $d(f^n x, fy)$ ili $d(fy, y)$, redom. Tada je $\lim_n s_{n,i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, i $\lim_n s_{n,i} = d(y, fy)$, $i = 4, 5$. Sada, na osnovu (4.5), zaključujemo da je $d(y, fy) = 0$, tj. $fy = y$. Da bismo dokazali jedinstvenost fiksne tačke, pretpostavimo da postoji $z \in X$ tako da je $fz = z$. Tada je, $d(z, y) = d(fz, fy) \leq \lambda d(z, y)$, i sledi $y = z$. □

Kao posledicu prethodne teoreme, dobijamo glavni rezultat rada Huang i Zhanga ([70], Teorema 1).

Posledica 4.1.3 *Neka je (X, d) kompletan konusni metrički prostor i P normalan konus sa normalnom konstantom K. Pretpostavimo da preslikavanje $f : X \mapsto X$ zadovoljava kontraktivan uslov*

$$d(fx, fy) \leq \lambda d(x, y), \quad \textit{for all } x, y \in X \tag{4.6}$$

gde je $\lambda \in [0, 1)$ konstanta. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku u X i za svako $x \in X$, iterativni niz $\{f^n x\}$ konvergira ka toj fiksnoj tački.

Napomena 4.1.2 *Napomenimo da u Teoremi 4.1.5, za $E = \mathbb{R}$, $P = [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$, dobijamo poznati Ćirićev rezultat [37] za kvazi-kontrakciju.*

4.1.3 $(g, f)-$kvazi-kontrakcija

U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate iz rada Ilića i Rakočevića [72] u kojima se razmatra egzistencija zajedničke fiksne tačke za par preslikavanja na konusnim metričkim prostorima. Rezultati izloženi ovde između ostalog predstavljaju i uopštenje rezultata iz radova: Das i Naik [46], Ćirić [37], Jungck [81], Huang i Zhang [70] na kompletnom konusnom metričkom prostoru.

Sledeća definicija uvodi pojam $f-$kvazi-kontrakcije na konusnim metričkim prostorima. Takva preslikavanja predstavljaju uopštenje pojma kvazi-kontrakcije koji su definisali Das i Naik.

Definicija 4.1.7 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor i $g, f : X \mapsto X$. Preslikavanje g je $f-$kvazi-kontrakcija ako za $\lambda \in (0, 1)$ i svako $x, y \in X$, postoji*

$$u \in C(f; x, y) \equiv \Big\{d(fx, fy), d(fx, gx), d(fx, gy), d(fy, gy), d(fy, gx)\Big\},$$

tako da je

$$d(gx, gy) \leq \lambda \cdot u. \tag{4.7}$$

Da bismo dokazali glavni rezultat ovog poglavlja(Teorema 4.1.6), prvo ćemo pokazati sledeću lemu.

Lema 4.1.7 *Neka je (X, d) konusni metrički prostor i P normalan konus. Neka su $g, f : X \mapsto X$, preslikavanja koja zadovoljavaju uslov*

$$g(X) \subset f(X) \tag{4.8}$$

i neka je g $f-$kvazi-kontrakcija.

Uzmimo $x_0 \in X$ i $x_1 \in X$ tako da je $g(x_0) = f(x_1)$. Ukoliko je definisan element $x_n \in X$, tada $x_{n+1} \in X$ definišemo tako da je $g(x_n) = f(x_{n+1}) = y_n$. Za $n \in \mathbb{N}$, definišimo $O(x_0; n) = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}$ i $O(x_0; \infty) = \{y_0, y_1, y_2, ...\}$.

Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi sledeće:

(i) Ako su $i, j, n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ i $n_0 < i, j \leq n$, tada je

$$\|d(y_i, y_j)\| < \delta(O(x_0; n)).$$

(*ii*) *Ako je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $n > n_0$, *tada je*

$$\delta(O(x_0;n)) = \max\{\|d(y_0,y_k)\|, \|d(y_i,y_j)\| : 1 \le k \le n,\ 1 \le i,j \le n_0\}.$$

(*iii*) *Ako je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $n > n_0$, *tada je*

$$\begin{aligned}\delta(O(x_0;n)) \le \max\Big\{&\|d(y_0,y_l)\| :\ 1 \le l \le n_0,\\ &\frac{K}{1-K^2\lambda^{n_0}} \cdot \|d(y_0,y_{n_0+1})\|,\ \lambda K\delta(O(x_0;n_0))\Big\}.\end{aligned}$$

(*iv*)

$$\begin{aligned}\delta(O(x_0;\infty)) \le \max\Big\{&\frac{K}{1-K^2\lambda^{n_0}} \cdot \|d(y_0,y_{n_0+1})\|,\\ &\lambda K\delta(O(x_0;n_0)), \|d(y_0,y_l)\| :\ 1 \le l \le n_0\Big\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

(*v*) *Ako je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $n \ge n_0 + 1$, *tada je*

$$\|d(y_n,y_{n-1})\| \le K\lambda^{n_0}\delta(O(x_0;\infty)).$$

(*vi*) *Niz* $\{y_n\}$ *je Cauchyev i za* $m > n > n_0 + 1$ *važi*

$$\|d(y_n,y_m)\| \le K\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \delta(O(x_0;\infty)).$$

Dokaz: Izaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\max\{\lambda^{n_0}K, \lambda^{n_0}K^2\} < 1$.

(*i*) Neka su $i,j,n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ i $n_0 < i,j \le n$. Postoji

$$\begin{aligned}s_1 \in \Big\{&d(gx_{i-1},gx_{j-1}), d(gx_{i-1},gx_i), d(gx_{i-1},gx_j), d(gx_{j-1},gx_j),\\ &d(gx_{j-1},gx_i)\Big\} \subset O(x_0;n)\end{aligned}$$

tako da je

$$d(y_i,y_j) = d(gx_i,gx_j) \le \lambda s_1.$$

Sada, postoji $s_2 \in O(x_0;n)$ tako da je $s_1 \le \lambda s_2$. Dakle,

$$d(y_i,y_j) \le \lambda^2 s_2.$$

Ukoliko n_0 puta ponovimo ovaj postupak, dobijamo

$$d(y_i, y_j) \leq \lambda^{n_0} s_{n_0},$$

za neko $s_{n_0} \in O(x_0; n)$. Prema tome,

$$\|d(y_i, y_j)\| \leq K\lambda^{n_0} \|s_{n_0}\| < \delta(O(x_0; n)), \tag{4.10}$$

i (i) sledi direktno.

(ii) Očigledno je da tvrđenje (ii) sledi iz (i).

(iii) Na osnovu (ii) zaključujemo da je potrebno posmatrati tri slučaja.

Slučaj 1. Ako je $\delta(O(x_0; n)) = \|d(y_0, y_k)\|$, za neko $k \in \mathbb{N}$ tako da je $1 \leq k \leq n_0$, tada je

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \max\{\|d(y_0, y_l)\| : 1 \leq l \leq n_0\}.$$

Slučaj 2. Ako je $\delta(O(x_0; n)) = \|d(y_0, y_k)\|$, za neko $k \in \mathbb{N}$ tako da je $n_0 < k \leq n$, tada je

$$d(y_0, y_k) \leq d(y_0, y_{n_0+1}) + d(y_{n_0+1}, y_k).$$

Iz (4.10) sledi

$$\delta(O(x_0; n)) \leq K\|d(y_0, y_{n_0+1})\| + \lambda^{n_0} K^2 \delta(O(x_0; n)).$$

Prema tome,

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \frac{K}{1 - K^2\lambda^{n_0}} \cdot \|d(y_0, y_{n_0+1})\|.$$

Slučaj 3. Ako je $\delta(O(x_0; n)) = \|d(y_i, y_j)\|$, za $i, j \in \mathbb{N}$ za koje je $1 \leq i, j \leq n_0$, tada je

$$d(y_i, y_j) \leq \lambda s_1,$$

za neko $s_1 \in \{d(a, b) : a, b \in O(x_0; n_0)\}$. Dakle,

$$\delta(O(x_0; n)) \leq \lambda K \delta(O(x_0; n_0)).$$

Ovim smo pokazali da važi (iii).

(iv) Na osnovu (iii), tvrđenje (iv) sledi direktno.

(v) Za $n \geq n_0 + 1$, važi

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda s_{n,n-1},$$

za neko $s_{n,n-1} \in \Big\{d(y_{n+1}, y_n),\ d(y_{n+1},\ y_{n-1}),\ d(y_n, y_{n-1}), 0\Big\}$. Takođe,

$$d(y_{n+1}, y_n) \leq \lambda s_{n,n+1},$$

gde je $s_{n,n+1} \in \Big\{d(y_{n+2}, y_{n+1}),\ d(y_{n+2}, y_n),\ d(y_{n+1},\ y_n), 0\Big\}$. Sada je,

$$d(y_{n+1}, y_{n-1}) \leq \lambda s_{n-1,n+1},$$

gde je

$$\begin{aligned} s_{n-1,n+1} \in \Big\{ & d(y_{n+2}, y_n), d(y_{n+2}, y_{n+1}), d(y_{n+2}, y_{n-1}), \\ & d(y_n, y_{n+1}), d(y_n, y_{n-1})\Big\}. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda^2 s^{(2)}_{n,n-1},$$

gde je

$$\begin{aligned} s^{(2)}_{n,n-1} \in \Big\{ & d(y_n, y_{n-1}), d(y_{n+1}, y_n), d(y_{n+1}, y_{n-1}), d(y_{n+2}, y_{n+1}), \\ & d(y_{n+2}, y_n), d(y_{n+2}, y_{n-1}), 0\Big\}. \end{aligned}$$

Nastavljajući ovaj postupak, posle n_0 koraka, dobijamo

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda^{n_0} s^{(n_0)}_{n,n-1}, \tag{4.11}$$

gde je $s^{(n_0)}_{n,n-1} \in \cup_{j=0}^{n_0} \cup_{i=0}^{j} \{d(y_{n+j}, y_{n-1+i})\}$.

Prema tome,

$$\|d(y_n, y_{n-1})\| \leq K\lambda^{n_0} \delta(O(x_0; \infty)).$$

(vi) Na osnovu (4.11), za $m > n > n_0 + 1$ sledi

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + d(y_{m-1}, y_m) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} s^{(n+k)}_{n+k+1,n+k}. \end{aligned}$$

Kako je konus P normalan, važi

$$\begin{aligned} \|d(y_n, y_m)\| &\leq K\lambda^n \cdot \left\| \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^k s^{(n+k)}_{n+k+1,n+k} \right\| \\ &\leq K \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \delta(O(x_0; \infty)). \end{aligned}$$

Prema tome, $d(y_n, y_m) \to 0,\ n, m \to \infty$, i sledi niz $\{y_n\}$ je Cauchyev. $\square$

Preslikavanje $f : X \mapsto X$, gde je (X, d) konusni metrički prostor je neprekidno u $x_0 \in X$ ako iz $x_n \to x_0$ sledi $f(x_n) \to f(x_0)$. Preslikavanje f je neprekidno na X ako je neprekedno u x za svako $x \in X$.

Teorema 4.1.6 *Neka je (X, d) kompletan konusni metrički prostor i P normalan konus. Neka su $g, f : X \mapsto X$ preslikavanja koja međusobno komutiraju, bar jedno od preslikavanja je neprekidno i važe* (4.7) *i* (4.8)*. Neka je $\{y_n\}$ niz definisan u Lemi 4.1.7 i* $\lim_n y_n = y \in X$*. Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u iz X. Ako je f neprekidna funkcija, tada je $u = gy = fy$, a ako je funkcija g neprekidna, tada je $u = y$.*

Dokaz: Na osnovu Leme 4.1.7 (vi), niz $\{y_n\}$ je Cauchyev. Kako je X kompletan konusni metrički prostor, postoji $y \in X$ tako da niz $\{y_n\}$ konvergira ka y.

Neka je funkcija f neprekidna. Dokažimo da je $fy = gy$. Kako je $g(x_n) = y_n$, sledi

$$d(fy, gy) = \lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gy). \tag{4.12}$$

Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji

$$s_n \in \Big\{ d(f^2x_n, fy), d(f^2x_n, gfx_n), d(f^2x_n, gy), d(fy, gfx_n), d(fy, gy) \Big\}$$

tako da je

$$d(fgx_n, gy) = d(gfx_n, gy) \leq \lambda s_n. \tag{4.13}$$

Očigledno su elementi niza $\{s_n\}$ oblika $d(f^2x_n, fy)$, $d(f^2x_n, gfx_n)$, $d(f^2x_n, gy)$, $d(fy, gfx_n)$ ili $d(fy, gy)$. Posmatrajmo podnizove $\{s_{n,i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, niza $\{s_n\}$, definisane tako da su svi elementi podniza $\{s_{n,i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, oblika $d(f^2x_n, fy)$, $d(f^2x_n, gfx_n)$, $d(f^2x_n, gy), d(fy, gfx_n)$ ili $d(fy, gy)$, redom. Očigledno, $\lim_n s_{n,i} = 0$, $i = 1, 2, 4$ i $\lim_n s_{n,i} = d(fy, gy)$, $i = 3, 5$. Iz (4.12) i (4.13) sledi $d(gy, fy) = 0$, tj. $fy = gy$. Uočimo da je

$$d(ggy, gy) \leq \lambda v,$$

za neko

$$\begin{aligned} v \in \{&d(fgy, fy), d(fgy, ggy), d(fy, gy),\\ &d(fgy, gy), d(fy, ggy)\} = \{d(ggy, gy), 0\}. \end{aligned}$$

Sada je $d(ggy, gy) = 0$, tj. $ggy = gy$. Dakle, $fgy = gfy = ggy = gy$, tj. gy je zajednička fiksna tačka za preslikavanja f i g.

Razmotrimo slučaj kada je funkcija g neprekidna. Dokazaćemo da je u ovom slučaju y zajednička fiksna tačka za preslikavanja f i g. Znamo da $fx_n \to y$ i $gx_n \to y$. Kako je g neprekidna funkcija, važi $gfx_n \to gy$ i $fgx_n \to gy$. Sada, na isti način kao u prvom delu dokaza, imamo da je $gy = y$ na osnovu sledeće jednakosti:

$$d(gy, y) = \lim_{n\to\infty} d(g^2x_n, gx_n) = 0.$$

Kako (4.8) važi, sledi da postoji $y' \in X$ tako da je $y = gy = fy'$. Sada je

$$d(g^2x_n, gy') \leq \lambda s$$

gde je

$$s \in \Big\{d(fgx_n, fy'), d(fgx_n, g^2x_n), d(fgx_n, gy'), d(fy', g^2x_n), d(fy', gy')\Big\}.$$

Slično pokazujemo da $d(g^2x_n, gy') \to 0, (n \to \infty)$, te je $gy = gy' = y$. Dakle, $fy = fgy' = gfy' = gy = y$. Jedinstvenost zajedničke fiksne tačke sledi na osnovu (4.7). $\square$

Napomena 4.1.3 *Ako u Teoremi 4.1.6, uzmemo* $E = \mathbb{R}$*,* $P = [0, \infty)$*,* $d(x, y) = |x-y|$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*, dobijamo sledeću posledicu koja predstavlja uopštenje teoreme Dasa i Naika [46].*

Posledica 4.1.4 *Neka je* (X, ρ) *kompletan metrički prostor,* $f : X \to X$ *neprekidna funkcija i* $g : X \to X$ *preslikavanje koje komutira sa* f*. Ako funkcije* f *i* g *zadovoljavaju uslov* $g(X) \subset f(X)$ *i ako postoji* $\lambda \in (0, 1)$ *tako da za svako* $x, y \in X$ *važi*

$$\rho(gx, gy) \leq \lambda \cdot M_\rho(x, y), \tag{4.14}$$

gde je

$$M_\rho(x, y) = \max\Big\{\rho(fx, fy), \rho(fx, gx), \rho(fx, gy), \rho(fy, gy), \rho(fy, gx)\Big\}, \tag{4.15}$$

tada preslikavanja f *i* g *imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Primetimo da je naša pretpostavka da je bar jedna od funkcija f ili g neprekidna, dok su Das i Naik koristili pretpostavku da je funkcija f neprekidna.

Takođe, kao posledicu Teoreme 4.1.6 dobijamo glavni rezultat rada Huang i Zhang ([70], Teorema 1).

Posledica 4.1.5 *Neka je* (X, d) *kompletan konusni metrički prostor i* P *normalan konus. Pretpostavimo da preslikavanje* $f : X \mapsto X$ *zadovoljava sledeći kontraktivan uslov*

$$d(fx, fy) \leq \lambda d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X \tag{4.16}$$

gde je $\lambda \in [0, 1)$ *konstanta. Tada funkcija* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku u* X *i za svako* $x \in X$ *iterativni niz* $\{f^n x\}$ *konvergira ka toj fiksnoj tački.*

Teorema 4.1.7 *Neka je* (X, d) *kompletan konusni metrički prostor i* P *normalan konus. Neka je* $f : X \mapsto X$ *preslikavanje za koje je* f^2 *neprekidno,* $g : f(X) \to X$ *tako da je* $gf(X) \subseteq f^2(X)$*, i* $f(g(x)) = g(f(x))$ *kada su obe strane definisane. Ako postoji* $\lambda \in (0, 1)$ *tako da (4.7) važi za svako* $x, y \in f(X)$*, tada preslikavanja* f *i* g *imaju zajedničku jedinstvenu fiksnu tačku u iz* X*.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in f(X)$. Kao u dokazu Teoreme 4.1.6, definišimo niz $\{x_n\}$ iz $f(X)$ tako da je $fx_{n+1} = gx_n = y_n$. Tada je

$$fy_n = fgx_n = gfx_n = gy_{n-1} = z_n.$$

Na osnovu Leme 4.1.7, za $n < m$, immamo

$$\|d(z_n, z_m)\| \leq K\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot \delta(O(x_0;\infty)).$$

Kao u dokazu Teoreme 4.1.6 dobijamo da je niz $\{z_n\}$ Cauchyev u X i $\lim z_n = z \in X$.

Dokažimo da je $f^2 z = gfz = u$, i da je u jedinstvena, zajednička fiksna tačka za preslikavanja f i g u X.

Primetimo da je

$$d(f^2 z_n, gfz_n) = d(gfz_{n-1}, gfz_n) \leq \lambda s_1,$$

za neko

$$s_1 \in \Big\{d(gfz_{n-2}, gfz_{n-1}), d(gfz_{n-2}, gfz_n), d(gfz_{n-1}, gfz_n), 0\Big\}.$$

Sada,kao u dokazu Leme 4.1.7, dobijamo da je za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^2 z_n, gfz_n) = d(gfz_{n-1}, gfz_n) \leq \lambda^{n-2} s_{n-2}$$

za neko

$$s_{n-2} \in \Big\{d(gfz_i, gfz_j) : \ 0 \leq i \leq n-1, \ 1 \leq j \leq n\Big\}.$$

Prema tome, $d(f^2 z_n, gfz_n) \to 0, n \to \infty$, i $f^2 z = gfz$. Na osnovu (4.7) sledi $g(gfz) = gfz$, tj. gfz je fiksna tačka za preslikavanje g. Takođe, $f(gfz) = g(f^2 z) = g(gfz) = gfz$. Ovim je dokazano da je gfz zajednička fiksna tačka za preslikavanja f i g. $\square$

Kao posledicu Teoreme 4.1.7, dobijamo Teoremu 3.1 rada [46].

Posledica 4.1.6 *Neka je (X, ρ) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ preslikavanje za koje je f^2 neprekidno. Neka je $g : f(X) \to X$ tako da je $gf(X) \subset f^2(X)$ i $f(g(x)) = g(f(x))$ kada su obe strane definisane. Ako postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da (4.14) važi za svako $x, y \in f(X)$, tada preslikavanja f i g imaju zajedničku jedinstvenu fiksnu tačku u iz X.*

Napomena 4.1.4 *Uglavnom smo izlagali, u prethodnim odeljcima, rezultate koji se odnose na izučavanje fiksnih tačaka preslikavanja na konusnim metričkim prostorima kada je odgovarajući konus normalan. U literaturi postoje i anlogna istraživanja i u slučaju kada konus nije normalan (videti [57], [58], [66], [79], [88], [118], [120]).*

4.2 Prostori sa $\omega-$rastojanjem

Pojam $w-$rastojanje, kao uopštenje metrike, uveden je i izučavan u radu O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi [86]. Oni su dali primere $w-$rastojanja i poboljšali teoremu Caristija [27], Eklandov variacionalni princip [51] i nekonveksnu minimizacionu teoremu Takahashia [141].

Neka je X metrički prostor sa metrikom d. Funkcija $p : X \times X \to [0, \infty)$ se naziva $w-$rastojanje na X ako zadovoljava sledeće uslove:

(1) $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$, za svako $x, y, z \in X$,

(2) za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da $p(z, x) \le \delta$ i $p(z, y) \le \delta$ povlači $d(x, y) \le \varepsilon$ i

(3) za svako $x \in X$, $p(x, \cdot) : X \to [0, \infty)$ je poluneprekidna s donje strane.

Za realnu funkciju f definisanu na metričkom prostoru X kažemo da je poluneprekidna sa donje strane u tački x_0 iz X ako je ili $\liminf_{x_n \to x_0} f(x_n) = \infty$ ili $f(x_0) \le \liminf_{x_n \to x_0} f(x_n)$, za svaki niz $x_n \in X$ za koji važi $x_n \to x_0$.

Navešćemo nekoliko primera $w-$rastojanja (videti [86]).

Primer 4.2.1 *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je metrika d, $w-$rastojranje na X.*

Primer 4.2.2 *Neka je X normiran prostor sa normom $\|\cdot\|$. Tada je funkcija $p : X \times X \mapsto [0, \infty)$ definisana sa $p(x, y) = \|x\| + \|y\|$, za $x, y \in X$ $w-$rastojanje.*

Primer 4.2.3 *Neka je X normiran prostor sa normom $\|\cdot\|$. Funkcija $p : X \times X \mapsto [0, \infty)$ definisana sa $p(x, y) = \|y\|$ za $x, y \in X$ je $w-$rastojanje.*

Sledeća lema, koju ćemo koristiti, dokazana je u [86]:

Lema 4.2.1 *Neka je X metrički prostor sa metrikom d i p w-rastojanje na X. Neka su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ nizovi u X i $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ nizovi u $[0,\infty)$ koji konvergiraju ka 0. Za $x, y, z \in X$, važe sledeća tvrđenja:*

(i) Ako je $p(x_n, y) \leq \alpha_n$ i $p(x_n, z) \leq \beta_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $y = z$. Specijalno, ako je $p(x, y) = 0$ i $p(x, z) = 0$, tada je $y = z$.

(ii) Ako je $p(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ i $p(x_n, z) \leq \beta_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tada $\{y_n\}$ konvergira ka z.

(iii) Ako je $p(x_n, x_m) \leq \alpha_n$, za svako $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, tada je $\{x_n\}$ Cauchyev niz.

(iv) Ak je $p(y, x_n) \leq \alpha_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\{x_n\}$ Cauchyev niz.

Napomena 4.2.1 *Neka je X metrički prostor sa metrikom d i neka je p $w-$rastojanje na X. Za $E \subset X$, definišimo $\delta_p(E) = \sup\{p(x, y) : x, y \in E\}$.*

Ako f i g zadovoljavaju uslov $g(X) \subset f(X)$, i ako je $x_0 \in X$, tada postoji $x_1 \in X$ tako da je $g(x_0) = f(x_1)$. Nastavljajući, za $x_n \in X$, postoji $x_{n+1} \in X$ za koje je $g(x_n) = f(x_{n+1})$. Uvedimo sledeće oznake: $y_n = g(x_n)$ i

$$O(x_0, n) = \{y_0, y_1, ..., y_n\}, \quad O(x_0, \infty) = \{y_0, y_1, ...\}.$$

4.2.1 Fiksne tačke za par preslikavanja

U ovom odeljku izlaěmo pojedine rezultate iz rada Ilića i Rakočevića [73] a odnose se na izučavanje egzistencije fiksne tačke za par preslikavanja na prostorima sa $w-$rastojanjem. Navedimo prvo nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 4.2.2 *Neka je (X, d) metrički prostor, a $f, g : X \to X$ komutativna preslikavanja od kojih je bar jedno neprekidno, i za koja važi* (2.99). *Tada, za svako $y \in X$ tako da je $f(y) \neq g(y)$, važi*

$$\inf\Big\{d(fx, y) + d(fx, gx) : x \in X\Big\} > 0.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je f neprekidno preslikavanje i da postoji $z \in X$ tako da je $f(z) \neq g(z)$ i $\inf\Big\{d(fx, z) + d(fx, gx) : x \in X\Big\} = 0$. Tada postoji niz $\{x_n\}$ u X tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \Big[d(fx_n, z) + d(fx_n, gx_n)\Big] = 0.$$

sada $d(fx_n, z) \to 0$ i $d(fx_n, gx_n) \to 0$, i sledi $fx_n \to z$ i $gx_n \to z$. Kako je $d(fz, gz) = \lim_n d(fgx_n, gz)$ i

$$\begin{aligned} d(fgx_n, gz) &= d(gfx_n, gz) \\ &\leq \lambda \max \Big\{ d(f^2x_n, fz), d(f^2x_n, gfx_n), d(f^2x_n, gz), \\ &\qquad d(fz, gz), d(fz, gfx_n) \Big\} \end{aligned}$$

sledi

$$d(fz, gz) \leq \lambda d(fz, gz).$$

Prema tome, za svako $z \in X$, tako da je $fz \neq gz$, sledi

$$\inf \Big\{ d(fx, z) + d(fx, gx) : x \in X \Big\} > 0.$$

Razmotrimo slučaj kada je g neprekidna funkcija. Pretpostavimo da postoji $z \in X$ tako da je $f(z) \neq g(z)$ i $\inf \Big\{ d(fx, z) + d(fx, gx) : x \in X \Big\} = 0$. Tada postoji niz $\{x_n\}$ u X tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \Big[d(fx_n, z) + d(fx_n, gx_n) \Big] = 0.$$

Dakle, $fx_n \to z$ i $gx_n \to z$. Kako je g neprekidno preslikavanje, $gfx_n \to gz$ i $fgx_n \to gz$. Dakle,

$$\begin{aligned} d(g^2x_n, gx_n) \leq \lambda \max \Big\{ &d(fgx_n, fx_n), d(fgx_n, g^2x_n), d(fgx_n, gx_n), \\ &d(fx_n, g^2x_n), d(fx_n, gx_n) \Big\}, \end{aligned}$$

te je

$$d(gz, z) \leq \lambda d(gz, z),$$

tj. $gz = z$. Iz $g(X) \subset f(X)$ sledi postoji $z' \in X$ tako da je $z = gz = fz'$. Sada je,

$$\begin{aligned} d(g^2x_n, gz') \leq \lambda \max \Big\{ &d(fgx_n, fz'), d(fgx_n, g^2x_n), d(fgx_n, gz'), \\ &d(fz', g^2x_n), d(fz', gz') \Big\}, \end{aligned}$$

te je $gz = gz' = z$. Prema tome,

$$fz = fgz' = gfz' = gz = z,$$

što je kontradikcija. $\square$

Lema 4.2.3 *Neka je X metrički prostor i $f : X \to X$ preslikavanje tako da je f^2 neprekidno i neka $g : f(X) \to X$. Osmi toga, neka postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da* (2.99) *važi, za svako $x, y \in f(X)$. Tada za svako $z \in X$ za koje je $f^2z \neq gfz$, sledi*

$$\inf\Big\{d(x,z) + d(f^2x, gfx) : x \in X\Big\} > 0.$$

Dokaz: Pretpostavimo da postoji $z \in X$ tako da je $f^2(z) \neq gf(z)$ i

$$\inf\Big\{d(x,z) + d(f^2x, gfx) : x \in X\Big\} = 0.$$

Tada postoji niz $\{x_n\}$ u X tako da je

$$\lim_{n\to\infty}\Big[d(x_n,z) + d(f^2x_n, gfx_n)\Big] = 0.$$

Prema tome, $\lim x_n = z$ i $\lim f^2x_n = \lim gfx_n = f^2z$.

Osim toga,

$$\begin{aligned} d(gfx_n, gfz) \leq \lambda \max\Big\{&d(f^2x_n, f^2z), d(f^2x_n, gfx_n), d(f^2x_n, gfz),\\ &d(f^2z, gfz), d(f^2, gfx_n)\Big\}. \end{aligned}$$

Sada je

$$d(f^2z, gfz) \leq \lambda d(f^2z, gfz).$$

Prema tome, $f^2z = gfz$, što je kontradikcija. $\square$

Lema 4.2.4 *Neka je X metrički prostor, $f : X \to X$ preslikavanje za koje je f^m neprekidno, i neka je $g : f^{m-1}(X) \to X$. Osim toga, neka postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da* (2.99) *važi za svako $x, y \in f(X)$. Tada, za svako $z \in X$ za koje je $f^mz \neq gf^{m-1}z$, imamo*

$$\inf\Big\{d(x,z) + d(f^mx, gf^{m-1}x) : x \in X\Big\} > 0.$$

Dokaz: Pretpostavimo da postoji $z \in X$ tako da je $f^m(z) \neq gf^{m-1}(z)$ i $\inf\{d(x,z) + d(f^mx, gf^{m-1}x) : x \in X\} = 0$. Tada postoji niz $\{x_n\}$ iz X tako da je

$$\lim_{n\to\infty}\{d(x_n,z) + d(f^mx_n, gf^{m-1}x_n)\} = 0.$$

Prema tome, $\lim_n x_n = z$ i $\lim_n f^m x_n = \lim_n gf^{m-1}x_n = f^m z$.

Osim toga,

$$\begin{aligned}
&d(gf^{m-1}x_n, gf^{m-1}z) \leq \\
&\leq \lambda \max\{d(ff^{m-1}x_n, ff^{m-1}z), d(ff^{m-1}x_n, gf^{m-1}x_n), \\
&d(ff^{m-1}z, gf^{m-1}z), d(ff^{m-1}x_n, gf^{m-1}z), d(ff^{m-1}z, gf^{m-1}x_n)\}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$d(f^m z, gf^{m-1}z) \leq \lambda d(f^m z, gf^{m-1}z).$$

Sledi $f^m z = gf^{m-1}z$, što je kontradikcija. Odavde sledi da za svako $z \in X$, za koje je $f^m z \neq gf^{m-1}z$, važi $\inf\{d(x,z) + d(f^m x, gf^{m-1}x) : x \in X\} > 0$. $\square$

Napomenimo (videti [82]) da su preslikavanja f i g na metričkom prostoru (X, d) *kompatibilna* ako je

$$\lim_n d(gfx_n, fgx_n) = 0$$

uvek kada je $\{x_n\}$ niz iz X za koji je

$$\lim_n gx_n = \lim_n fx_n = x$$

za nako $x \in X$.

Sledeća lema se odnosi na par kompatibilnih preslikavanja.

Lema 4.2.5 *Neka je X metrički prostor sa metrikom d i $f, g : X \mapsto X$ kompatibilna preslikavanja. Ako je g neprekidno preslikavanje i važi* (2.99), *tada za svako $z \in X$ za koje je $g(z) \neq z$, važi*

$$\inf\Big[d(gx, z) + d(fx, gx) : x \in X\Big] > 0.$$

Dokaz: Pretpostavimo da postoji $z \in X$ tako da je $g(z) \neq z$ i

$$\inf\Big\{d(gx, z) + d(fx, gx) : x \in X\Big\} = 0.$$

Tada postoji niz $\{x_n\}$ u X tako da je

$$\lim_{n\to\infty}\Big[d(gx_n, z) + d(fx_n, gx_n)\Big] = 0.$$

Kako je $d(gx_n, z) \to 0$ i $d(fx_n, gx_n) \to 0$, sledi $gx_n \to z$ i $fx_n \to z$. Dakle, $gfx_n \to gz$, $d(fgx_n, gfx_n) \to 0$ i $fgx_n \to gz$. Sada je

$$d(ggx_n, gx_n) \leq \lambda \max \Big\{ d(fgx_n, fx_n), d(fgx_n, g^2x_n), d(fgx_n, gx_n), d(fx_n, ggx_n), d(fx_n, gx_n) \Big\}.$$

Dakle,

$$d(gz, z) \leq \lambda d(gz, z),$$

što je nemoguće. $\square$

Na sličan način pokazujemo i sledeću lemu.

Lema 4.2.6 *Neka je (X, d) metrički prostor, $f, g : X \mapsto X$, i neka važi* (2.99). *Tada za svako $z \in X$ tako da je $f(z) \neq g(z)$, važi*

$$\inf \Big\{ d(gx, fz) + d(fx, gx) : x \in X \Big\} > 0.$$

Lema 4.2.7 *Neka je (X, d) metrički prostor i p w-rastojanje na X. Pretpostavimo da za preslikavanja $f, g : X \mapsto X$ za koja važi $g(X) \subset f(X)$ postoji konstanta $\lambda \in (0, 1)$ tako da je za svako $x, y \in X$*

$$p(gx, gy) \leq \lambda M_p(x, y), \tag{4.17}$$

gde je

$$M_p(x, y) = \max \Big\{ p(fx, fy), p(fx, gx), p(fy, gy), p(fx, gy), p(fy, gx) \Big\}.$$

Ako $x_0 \in X$, postoji $x_1 \in X$ tako da je $g(x_0) = f(x_1)$. Nastavljajući ovaj postupak, za $x_n \in X$, postoji $x_{n+1} \in X$ tako da je $g(x_n) = f(x_{n+1})$. Neka je $y_n = g(x_n)$.

Tada

(i) *Za svako $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \leq n$, imamo*

$$p(y_i, y_j) \leq \lambda \delta_p(O(x_0, n)).$$

(*ii*) *Za svako* $x_0 \in X$ *i* $n \in \mathbb{N}$, *postoji* $k, l \in \mathbb{N}$ *gde je* $k, l \leq n$ *tako da je*

$$\delta_p(O(x_0, n)) = \max\Big\{p(y_0, y_0), p(y_0, y_k), p(y_l, y_0)\Big\}.$$

(*iii*) *Za svako* $x_0 \in X$,

$$\delta_p(O(x_0, \infty)) \leq (1-\lambda)^{-1} \cdot a(x_0).$$

gde je $a(x_0) = p(y_0, y_0) + p(y_0, y_1) + p(y_1, y_0)$.

(*iv*) $p(y_{n-1}, y_n) \leq \lambda^{n-1}(1-\lambda)^{-1} \cdot a(x_0)$.

(*v*) *Za svako* $x \in X$, *niz* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je Cauchyev. Ako* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira ka* $y \in X$, *tada je*

$$p(y_{n-1}, y) \leq \lim_{m\to\infty} \inf p(y_{n-1}, y_m) \leq \lambda^{n-2}(1-\lambda)^{-2} \cdot a(x_0). \tag{4.18}$$

Dokaz: (*i*) Neka je $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ i $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \leq n$. Tada,

$$\begin{aligned}
p(y_i, y_j) &\leq \lambda M_p(x_i, x_j) \\
&\leq \lambda \max\Big\{p(fx_i, fx_j), p(fx_i, y_i), p(fx_j, y_j), p(fx_i, y_j), p(fx_j, y_i)\Big\} \\
&\leq \lambda \max\Big\{p(y_{i-1}, y_{j-1}), p(y_{i-1}, y_i), p(y_{j-1}, y_j), \\
p(y_i, y_j) &\leq \lambda \max\Big\{p(y_{i-1}, y_j), p(y_{j-1}, y_i)\Big\} \\
&\leq \lambda \delta_p(O(x_0, n)).
\end{aligned}$$

(*ii*) Očigledno, (*ii*) sledi iz (*i*).

(*iii*) Iz (*ii*) sledi

$$\delta_p(O(x_0, n)) = \max\Big\{p(y_0, y_0), p(y_0, y_i), p(y_j, y_0)\Big\},$$

za neko $1 \leq i, j \leq n$.

Ako je $\delta_p(O(x_0, n)) = p(y_0, y_0)$, dobijamo

$$\delta_p(O(x_0, n)) \leq (1-\lambda)^{-1} p(y_0, y_0).$$

Ako je $\delta_p(O(x_0, n)) = p(y_0, y_i)$, tada je

$$\delta_p(O(x_0, n)) = p(y_0, y_i) \leq p(y_0, y_1) + p(y_1, y_i) \leq p(y_0, y_1) + \lambda \delta_p(O(x_0, n)),$$

i

$$\delta_p(O(x_0,n)) \leq (1-\lambda)^{-1}p(y_0,y_1).$$

Ako je $\delta_p(O(x_0,n)) = p(y_i,y_0)$, tada je

$$\delta_p(O(x_0,n)) = p(y_i,y_0) \leq p(y_i,y_1) + p(y_1,y_0) \leq \lambda\delta_p(O(x_0,n)) + p(y_1,y_0).$$

Prema tome, iz (ii) sledi

$$\delta_p(O(x_0,n)) \leq (1-\lambda)^{-1}p(y_1,y_0).$$

Ovim smo dokazali (iii).

(iv) Kako je

$$\begin{aligned} p(y_{n-1},y_n) \leq \lambda \max\Big\{&p(y_{n-2},y_{n-1}), p(y_{n-1},y_n), \\ &p(y_{n-2},y_n), p(y_{n-1},y_{n-1})\Big\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

i

$$\begin{aligned} p(y_{n-2},y_n) \leq \lambda \max\Big\{&p(y_{n-3},y_{n-1}), p(y_{n-3},y_{n-2}), p(y_{n-1},y_n), \\ &p(y_{n-3},y_n), p(y_{n-1},y_{n-2})\Big\}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} p(y_{n-1},y_{n-1}) \leq \lambda \max\Big\{&p(y_{n-2},y_{n-2}), p(y_{n-2},y_{n-1}), p(y_{n-2},y_{n-1}), \\ &p(y_{n-2},y_{n-1}), p(y_{n-2},y_{n-1})\Big\}, \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} p(y_{n-1},y_n) &\leq \lambda^2 \max\Big\{p(y_i,y_j):\ n-3 \leq i \leq n-1,\ n-2 \leq j \leq n\Big\} \\ &\leq ... \leq \\ &\leq \lambda^{n-2} \max\Big\{p(y_i,y_j):\ 1 \leq i \leq n-1,\ 2 \leq j \leq n\Big\}. \end{aligned}$$

Sada iz (i) i (iii) sledi (iv).

(v) Pretpostavimo da je $m > n$. Iz (iv), sledi

$$\begin{aligned}
p(y_{n-1},y_m) &\leq p(y_{n-1},y_n)+p(y_n,y_{n+1})+...+p(y_{m-1},y_m) \\
&= \sum_{k=1}^{n-m+1} p(y_{n-k},y_{n-k+1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-m+1} \lambda^{n-k}(1-\lambda)^{-1}\cdot a(x_0) \\
&\leq \frac{\lambda^{n-1}}{(1-\lambda)^2}\cdot a(x_0).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Na osnovu Leme 4.2.1 (*iii*), $\{y_n\}$ je Cauchyev niz koji konvergira ka $y \in X$. Sada iz (4.20) sledi (4.18). □

Teorema 4.2.1 *Neka je X kompletan metrički prostor sa metrikom d i p w-rastojanje na X. Neka su $f, g : X \mapsto X$ komutativna preslikavanja, za koja važi* (4.17) *i $g(X) \subset f(X)$, i neka je*

(*i*) *za svako $y \in X$ za koje je $f(y) \neq g(y)$,*

$$\inf\Big\{p(fx,y)+p(fx,gx) : x \in X\Big\} > 0.$$

Preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku $u \in X$ i $p(u,u) = 0$.

Dokaz: Konstruišimo niz $\{x_n\}$ iz X na sledeći način: Za proizvoljno $x_0 \in X$ postoji $x_1 \in X$ tako da je $g(x_0) = f(x_1)$. Nastavljajući na ovaj način, za $x_n \in X$, postoji x_{n+1} tako da je $g(x_n) = f(x_{n+1})$. Označimo sa $y_n = gx_n$.

Na osnovu (4.20) koristeći Lemu 4.2.1 (*iii*), dobijamo da je niz $\{y_n\}$ Cauchyev. Kako je X kompletan metrički prostor, postoji $y \in X$ tako da $\{y_n\}$ konvergira ka y.

Dokažimo da je $fy = gy$. Pretpostavimo da je $fy \neq gy$. Na osnovu (*i*), (4.18) i (4.19) sledi

$$\begin{aligned}
0 &< \inf\Big\{p(fx,y)+p(fx,gx) : x \in X\Big\} \\
&\leq \inf\Big\{p(fx_n,y)+p(fx_n,gx_n) : n \in \mathbb{N}\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{(2-\lambda)a(x_0)}{(1-\lambda)^2}\cdot \inf\left\{\lambda^{n-2} : n\in\mathbb{N}\right\}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

što je nemoguće. Prema tome, $fy = gy$.

Sada je,

$$p(gy, gy) \le \lambda M_p(y, y) = \lambda p(gy, gy),$$

te je $p(gy, gy) = 0$. Analogno se može dokazati da je $p(g^2y, g^2y) = 0$.

Prema tome,

$$
\begin{aligned}
p(gy, g^2y) &\le \lambda M_p(y, gy)\\
&= \lambda \max\left\{p(gy, g^2y), p(g^2y, gy), p(g^2y, g^2y), p(gy, gy)\right\}\\
&= \lambda \max\left\{p(gy, g^2y), p(g^2y, gy)\right\} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

i

$$p(g^2y, gy) \le \lambda M_p(gy, y) = \lambda \max\left\{p(gy, g^2y), p(g^2y, gy)\right\}. \qquad (4.22)$$

Iz (4.21) i (4.22), sledi $p(gy, g^2y) = 0$ i $p(g^2y, gy) = 0$. Na osnovu $p(gy, g^2y) = 0$ i $p(gy, gy) = 0$ i Leme 4.2.1 (i), dobijamo da je $g^2y = gy$. Dakle, $g^2y = gy$ tj., $g(y)$ je fiksna tačka za preslikavanje g. Sada je,

$$fgy = gfy = g^2y = gy,$$

te je $g(y)$ i fiksna tačka za preslikavanja f. Označimo sa $u = g(y)$.

Da bismo dokazali jedinstvenost zajedničke fiksne tačke preslikavanja f i g, pretpostavimo da postoji $v \in X$ tako da je $fv = gv = v$. Sada je,

$$
\begin{aligned}
p(v, v) &= p(gv, gv)\\
&\le \lambda \max\left\{p(fv, fv), p(fv, gv), p(fv, gv), p(fv, gv), p(fv, gv)\right\}\\
&= \lambda p(v, v).
\end{aligned}
$$

Prema tome, $p(v, v) = 0$. Osim toga

$$
\begin{aligned}
p(u, v) &= p(gu, gv)\\
&\le \lambda \max\left\{p(u, v), p(u, u), p(v, v), p(u, v), p(v, u)\right\}\\
&= \lambda \max\left\{p(u, v), p(v, u)\right\}
\end{aligned}
$$

i

$$p(v,u) \leq \lambda \max\Big\{p(u,v), p(v,u)\Big\}.$$

Sledi, $p(u,v) = p(v,u) = 0$. Iz (ii), sledi $u = v$ i $p(u,u) = 0$. □

Napomena 4.2.2 *Ukoliko u Teoremi 4.2.1 posmatramo specijalan slučaj kada je $p = d$, korišćenjem Leme 4.2.2 dobijamo uopštenje Teoreme 2.11.1. Po pretpostavci su ili f ili g neprekidne funkcije, dok su Das i Naik posmatrali slučaj kada je samo f neprekidna funkcija.*

Teorema 4.2.2 *Neka je (X,d) kompletan metrički prostor sa metrikom d, p w-rastojanje na X, $f : X \to X$, $g : f(X) \to X$ preslikavanja za koja važi $gf(X) \subseteq f^2(X)$, i $f(g(x)) = g(f(x))$. Neka postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da (4.17) važi za svako $x, y \in f(X)$. Ako za $z \in X$, za koje je $f^2z \neq gfz$, imamo*

$$\inf\Big\{p(x,z) + p(f^2x, gfx) : x \in X\Big\} > 0,$$

tada preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku $u \in X$ i $p(u,u) = 0$.

Dokaz: Neka je $x_0 \in f(X)$. Kao u dokazu Teoreme 4.2.1, definišimo niz $\{x_n\}$ iz $f(X)$ tako da je $fx_{n+1} = gx_n = y_n$. Sada je

$$fy_n = fgx_n = gfx_n = gy_{n-1} = z_n.$$

Na osnovu Leme 4.2.7 (v), za $n < m$, imamo da je

$$p(z_n, z_m) \leq \frac{\lambda^{n-1}}{(1-\lambda)^2} \cdot \Big(p(z_0,z_0) + p(z_0,z_1) + p(z_1,z_0)\Big).$$

Na osnovu Leme 4.2.1, sledi $\{z_n\}$ je Cauchyev niz u X i $\lim z_n = z \in X$.

Dokažimo da je $f^2z = gfz = u$, da je u zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g u X, i da je $p(u,u) = 0$.

Primetimo da je

$$\begin{aligned}p(f^2z_n, gfz_n) &= p(gfz_{n-1}, gfz_n)\\ &\leq \lambda \max\Big\{p(gfz_{n-2}, gfz_{n-1}), p(gfz_{n-1}, gfz_n),\\ &\qquad p(gfz_{n-2}, gfz_n), p(gfz_{n-1}, gfz_{n-1})\Big\}.\end{aligned}$$

Kao u dokazu Leme 4.2.7, dobijamo

$$\begin{aligned} p(f^2 z_n, gfz_n) &= p(gfz_{n-1}, gfz_n) \\ &\leq \lambda^{n-1} \cdot \max\Big\{p(gfz_i, gfz_j):\ 0 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n\Big\} \end{aligned}$$

Prema tome, $p(f^2 z_n, gfz_n) \to 0, n \to \infty$. Osim toga,

$$\begin{aligned} p(z_n, z) &\leq \liminf_{m\to\infty} p(z_n, z_m) \\ &\leq \frac{\lambda^{n-1}}{(1-\lambda)^2} \cdot \Big(p(z_0, z_0) + p(z_0, z_1) + p(z_1, z_0)\Big) \to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $f^2 z \neq gfz$. Na osnovu pretpostavke teoreme imamo

$$\begin{aligned} 0 &< \inf \Big\{p(x, z) + p(f^2 x, gfx) : x \in X\Big\} \\ &\leq \inf \Big\{p(z_n, z) + p(f^2 z_n, gfz_n) : n \in \mathbb{N}\Big\} \\ &\leq \inf \Big\{\lambda^{n-1} : n \in \mathbb{N}\Big\} \cdot c = 0, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} c = \max &\Big\{p(gfz_i, gfz_j):\ 0 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n\Big\} \\ &+ (1-\lambda)^{-2} \cdot \Big(p(z_0, z_0) + p(z_0, z_1) + p(z_1, z_0)\Big). \end{aligned}$$

Prema tome, došli smo do konttradikcije, i sledi $f^2 z = gfz$. Lako se proverava da je $p(gfz, gfz) = 0$ i $p(g^2 fz, g^2 fz) = 0$.

Takođe važi,

$$p(g^2 fz, gfz) \leq \lambda \max \Big\{p(g^2 fz, gfz), p(gfz, g^2 fz)\Big\},$$

i

$$p(gfz, g^2 fz) \leq \lambda \max \Big\{p(g^2 fz, gfz), p(gfz, g^2 fz)\Big\}$$

odakle je $p(g^2 fz, gfz) = p(gfz, g^2 fz) = 0$. Sada je na osnovu Leme 4.2.1(i), $g(gfz) = gfz$, tj. gfz je fiksna tačka preslikavanja g. Takođe je, $f(gfz) = g(f^2 z) = g(gfz) = gfz$. Prema tome, gfz je zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g i $p(gfz, gfz) = 0$.

Jedinstvenost zajedničke fiksne tačke preslikavanja f i g sledi na osnovu dokaza Teoreme 4.2.1. $\square$

Kao posledicu, dobijamo teoremu 3.1 iz rada [46]:

Posledica 4.2.1 *Neka je X kompletan metrički prostor sa metrikom d i $f : X \to X$ preslikavanje tako da je f^2 neprekidno. Neka je $g : f(X) \to X$ preslikavanje za koje važi $gf(X) \subset f^2(X)$ i $f(g(x)) = g(f(x))$. Ako postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da* (2.99) *važi za svako $x, y \in f(X)$, tada preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u iz X.*

Kao posledicu prethodne teoreme dobijamo i rezultat koji je uopštenje rezultata iz rada [147] (Lemma 2.5 iz [147]):

Posledica 4.2.2 *Neka je X kompletan metrički prostor sa metrikom d i p w-rastojanje na X. Neka su $f, g : X \to X$ komutativna preslikavanja, za koja su ispunjeni uslovi (2.93) i* (4.17). *Ako za svako $z \in X$ za koje je $f^2z \neq gfz$, imamo*

$$\inf\Big\{p(x,z) + p(f^2x, gfx) : x \in X\Big\} > 0,$$

tada preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku $u \in X$ i $p(u,u) = 0$.

Dokaz: Očigledno iz $fgx = gfx$ i $g(X) \subset f(X)$ sledi $gf(X) \subset f^2(X)$. Prema tome, svi uslovi Teoreme 4.2.2 su ispunjeni. □

Posledica 4.2.3 *Neka je X kompletan metrički prostor sa metrikom d i p w-rastojanje na X. Neka su $f : X \mapsto X$ i $g : f^{m-1}(X) \mapsto X$ preslikavanja za koja važi $g(f^{m-1}(X)) \subseteq f^m(X)$ i neka g i f komutiraju. Ako postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da* (4.17) *važi za svako $x, y \in f^{m-1}(X)$ i ako za svako $z \in X$ za koje je $f^m z \neq gf^{m-1}z$, imamo*

$$\inf\Big\{p(x,z) + p(f^m x, gf^{m-1}x) : x \in X\Big\} > 0,$$

tada preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u u X i $p(u,u) = 0$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.2. □

Koristeći Lemu 4.2.4 i Posledicu 4.2.3, dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 4.2.4 *Neka je X kompletan metrički prostor, $f : X \mapsto X$ preslikavanje za koje je $f^m, m \in \mathbb{N}$ neprekidno i neka je $g : f^{m-1}(X) \to X$ preslikavanje za koje je $g(f^{m-1}(X)) \subseteq f^m(X)$ i neka preslikavanja g i f komutiraju. Ako postoji $\lambda \in (0, 1)$ tako da (4.17) važi za svako $x, y \in f^{m-1}(X)$, tada preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u u X.*

Teorema 4.2.3 *Neka je X kompletan metrički prostor sa metrikom d i p w-rastojanje na X. Neka je $g : X \to X$ neprekidno preslikavanje i $f : X \to X$ preslikavanje koje je kompatibilno sa g. Neka preslikavanja f i g zadovoljavaju $g(X) \subset f(X)$ i (4.17). Ako*

(i) za svako $z \in X$ za koje je $g(z) \neq z$, važi

$$\inf \Big\{ p(gx, z) + p(fx, gx) : x \in X \Big\} > 0,$$

(ii) za svako $z \in X$ za koje je $f(z) \neq g(z)$, važi

$$\inf \Big\{ p(gx, fz) + p(fx, gx) : x \in X \Big\} > 0.$$

tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u iz X i $p(u, u) = 0$.

Dokaz: Neka je y_n niz konstruisan u dokazu Teoreme 4.2.1. Postoji $y \in X$ tako da $\{y_n\}$ konvergira ka y. Pretpostavimo da je $gy \neq y$. Na osnovu (i), Leme 4.2.7 (iv) i (v), sledi

$$\begin{aligned} 0 &< \inf \Big\{ p(gx, y) + p(fx, gx) : x \in X \Big\} \\ &\leq \inf \Big\{ p(gx_n, y) + p(fx_n, gx_n) : n \in \mathbb{N} \Big\} \\ &= \inf \Big\{ p(y_n, y) + p(y_{n-1}, y_n) : n \in \mathbb{N} \Big\} \\ &\leq \frac{(2-\lambda)a(x_0)}{(1-\lambda)^2} \cdot \inf \Big\{ \lambda^{n-2} : n \in \mathbb{N} \Big\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prema tome, $gy = y$. Iz $g(X) \subseteq f(X)$, sledi da postoji $y' \in X$ tako da je $y = gy = fy'$. Zato je

$$\begin{aligned} &\inf \Big\{ p(gx, fy') + p(fx, gx) : x \in X \Big\} \\ &= \inf \Big\{ p(gx, y) + p(fx, gx) : x \in X \Big\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Iz (ii) sledi $fy' = gy'$. Sada imamo, (Lema 1 [91]) da je

$$fy = fgy' = gfy' = gy = y.$$

Jedinstvenost zajedničke fiksne tačke preslikavanja f i g sledi na osnovu Teoreme 4.2.1. $\square$

Kao posledicu prethodne teoreme i Teoreme 4.2.1 koristeći Lemu 4.2.2 i Lemu 4.2.6, dobijamo Teoremu 4 iz rada [91]:

Posledica 4.2.5 *Neka je X kompletan metrički prostor, $f, g : X \to X$ kompatibilna preslikavanja za koja važe* (2.93) *i* (2.94). *Ako je jedno od preslikavanja f ili g neprekidno, tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u X.*

Takahashi [141] je 1970. godine definisao pojam konveksnosti u metričkim prostorima i uopštio poznate rezultate vezane za fiksnu tačku preslikavanja na Banachovim prostorima.

Neka je X metrički prostor i $I = [0,1]$ segment na realnoj pravoj. Funkcija $W : X \times X \times I \mapsto X$ je konveksna struktura (u smislu Takahashia) na X ako važi

$$d(z, W(x,y,\lambda)) \leq \lambda d(z,x) + (1-\lambda)d(z,y)$$

za svako $x, y, z \in X$ i $\lambda \in I$. Ako je na metričkom prostoru (X,d) definisana Takahashieva konveksna struktura, tada kažemo da je X Takahashiev konveksni metrički prostor, ili metrički prostor hiperboličkog tipa.

Ako je (X,d) Takahashiev konveksni metrički prostor, tada za $x, y \in X$ definišemo:

$$\mathrm{seg}[x,y] = \Big\{ W(x,y,\lambda) : \lambda \in [0,1] \Big\}.$$

Očigledno, svaki konveksni podskup normiranog prostora je konveksni metrički prostor sa definisanom konveksnom strukturom $W(x,y,\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$.

U sledećoj teoremi su izloženi rezultati vezani za preslikavanja iz C u X.

Teorema 4.2.4 *Neka je (X,d) kompletan Takahashiev konveksni metrički prostor sa konveksnom structurom W koja je neprekidna po trećoj promenljivoj, C neprazan zatvoren podskup od X, čiji je rub $\partial C \neq \emptyset$. Neka je p w-rastojanje na X, tako da za $u,x,y \in X$ i $z \in seg[x,y]$ imamo*

$$p(u,z) \leq \max\Big\{p(u,x), p(u,y)\Big\}. \tag{4.23}$$

Neka je $g: C \mapsto X$, $f: X \mapsto X$, $f: C \mapsto C$, i f i g međusobno komutiraju na C. Pretpostavimo da f i g zadovoljavaju sledeće uslove:

(i) *Postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da za svako $x,y \in C$, važi*

$$p(gx,gy) \leq \lambda M_p(x,y),$$

gde je

$$M_p(x,y) = \max\Big\{p(fx,fy), p(fx,gx), p(fy,gy), p(fx,gy), p(fy,gx)\Big\}.$$

(ii)

$$\partial C \subseteq f(C), \tag{4.24}$$

(iii)

$$g(C) \bigcap C \subset f(C), \tag{4.25}$$

(iv)

$$f(x) \in \partial C \Longrightarrow g(x) \in C. \tag{4.26}$$

(v) *Za svako $z \in C$ za koje je $f(z) \neq g(z)$, imamo*

$$\inf\Big\{p(fx,z) + p(fx,gx) : x \in C\Big\} > 0.$$

Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku $u \in C$ i $p(u,u) = 0$.

Dokaz. Izaberimo proizvoljnu tačku $w \in \partial C$, i konstruišimo niz $\{x_n\}$ iz C na sledeći način: Iz (4.24) sledi postoji $x_0 \in C$ tako da je $f(x_0) = w$. Sada, na osnovu (4.26) sledi $g(x_0) \in C$. Dakle, iz (4.25) imamo da postoji $x_1 \in C$ tako da je $f(x_1) = g(x_0)$. Ako je $g(x_1) \in C$, iz (4.25) sledi postoji $x_2 \in C$ tako da je $f(x_2) = g(x_1)$. Ako $g(x_1) \notin C$, na osnovu neprekidnosti funkcije W po trećoj promenljivoj, postoji $\lambda_{11} \in [0, 1]$ tako da je

$$W(f(x_1), g(x_1), \lambda_{11}) \in \partial C \cap \mathrm{seg}[f(x_1), g(x_1)].$$

Na osnovu (4.24) postoji $x_2 \in \partial C$ za koje je $f(x_2) = W(f(x_1), g(x_1), \lambda_{11})$.

Ako smo odredili n članova ovog niza, $(n + 1)$-vi definišemo na sledeći način: Ako je $g(x_n) \in C$, iz (4.25) sledi $f(x_{n+1}) = g(x_n)$ za neko $x_{n+1} \in C$; Ako $g(x_n) \notin C$, postoji $\lambda_{nn} \in [0, 1]$ tako da je

$$W(f(x_n), g(x_n), \lambda_{nn}) \in \partial C \cap \mathrm{seg}[f(x_n), g(x_n)].$$

Na osnovu (4.24) izaberimo $x_{n+1} \in \partial C$ tako da je

$$f(x_{n+1}) = W(f(x_n), g(x_n), \lambda_{nn}).$$

Nastavljajući postupak, konstruišemo niz $\{x_n\}$ iz C.

Dokažimo da su $f(x_n)$ i $g(x_n)$ Cauchyevi nizovi.

Najpre dokažimo da važi sledeća implikacija:

$$f(x_{n+1}) \neq g(x_n) \;\Rightarrow\; f(x_n) = g(x_{n-1}). \tag{4.27}$$

Pretpostavimo suprotno, neka je $f(x_{n+1}) \neq g(x_n)$ i $f(x_n) \neq g(x_{n-1})$. Tada je $x_n \in \partial C$. Na osnovu (4.25), sledi $g(x_n) \in C$, te je $f(x_{n+1}) = g(x_n)$, što je kontradikcija. Dakle, sledi (4.27).

Označimo sa

$$\begin{aligned}
&B(n,k) = \Big\{f(x_j), g(x_j) : n \leq j \leq n+k\Big\},\\
&b(n,k) = \delta_p(B(n,k)),\\
&B(n) = \Big\{f(x_j), g(x_j) : n \leq j\Big\},\\
&b(n) = \delta_p\,(B(n))
\end{aligned}$$

i primetimo da $b(n, k) \uparrow b(n)$ kada $k \to \infty$ i $b(n) \downarrow$. Dakle, niz $\{b(n)\}$ je konvergentan i neka je $b = \lim_n b(n) \geq 0$. Da bismo pokazali da su nizovi $f(x_n)$ i $g(x_n)$ Cauchyevi, dovoljno je pokazati da je $b = 0$.

Pokažimo najpre da je

$$b(n,k) \le \lambda b(n-2,k+2), \quad n,k \ge 2. \tag{4.28}$$

Da bismo dokazali (4.28) potrebno je posmatrati tri slučaja:

1. $b(n,k) = p(f(x_i), g(x_j))$, za $n \le i, j \le n+k$.

ako je $f(x_i) = g(x_{i-1})$, tada je

$$b(n,k) = p(g(x_{i-1}), g(x_j)) \le \lambda M_p(x_{i-1}, x_j) \le \lambda b(n-2, k+2).$$

ako je $f(x_i) \ne g(x_{i-1})$, tada je $f(x_{i-1}) = g(x_{i-2})$ i $f(x_i) \in \mathrm{seg}[f(x_{i-1}), g(x_{i-1})] = \mathrm{seg}\,[g(x_{i-2}), g(x_{i-1})]$. Dakle,

$$\begin{aligned} b(n,k) = p(f(x_i), g(x_j)) &\le \max\Big\{p(g(x_{i-2}), g(x_j)), p(g(x_{i-1}), g(x_j))\Big\} \\ &\le \lambda \max\Big\{M_p(x_{i-2}, x_j), M_p(x_{i-1}, x_j)\Big\} \le \lambda b(n-2, k+2). \end{aligned}$$

2. $b(n,k) = p(f(x_i), d(f(x_j))$, za $n \le i, j \le n+k$.

ako je $f(x_j) = g(x_{j-1})$, tada se slučaj 2 svodi na slučaj 1.

ako je $f(x_j) \ne g(x_{j-1})$, tada kao u slučaju 1 imamo $j \ge 2$, $f(x_{j-1}) = g(x_{j-2})$, i

$$f(x_j) \in \partial C \bigcap \mathrm{seg}\,[g(x_{j-2}), g(x_{j-1})].$$

Prema tome,

$$b(n,k) = p(f(x_i), f(x_j)) \le \max\Big\{p(f(x_i), g(x_{j-2})), p(f(x_i), g(x_{j-1}))\Big\}$$

i slučaj 2 se svodi na slučaj 1.

3. Slučaj kada je $b(n,k) = p(g(x_i), g(x_j))$, za $n \le i, j \le n+k$ je trivijalan.

Ako uzmemo $k \to \infty$ u (4.28) dobijamo $b(n) \le \lambda b(n-2)$, a ako sada u dobijenoj nejednakosti uzmemo da $n \to \infty$, dobijamo $b \le \lambda b$. Dakle, $b = 0$. Kao u dokazu Teoreme 4.2.1 zaključujemo da su nizovi $\{f(x_n)\}$ i $\{g(x_n)\}$ Cauchyevi. Kako je $f(x_n) \in C$, a C je zatvoren podskup kompletnog prostora X, zaključujemo da je $\lim f(x_n) = y \in C$. Takođe je $\lim g(x_n) = y$. Kao u dokazu Teoreme 4.2.1, dobijamo da je $f(y) = g(y)$. Ovim dokazujemo da preslikavanja f i g imaju zajedničku fiksnu tačku y. $\Box$

Napomena 4.2.3 *Primetimo da* $w-$*rastojanje* p *iz Primera 4.2.1, 4.2.2 i 4.2.3 zadovoljavaju uslov* (4.23). *Takođe i* $w-$*rastojanje* p *iz Primera 6 u [86], zadovoljava uslov* (4.23).

Napomena 4.2.4 *U Teoremi 4.2.4, za* $f = I_X$, *dobijamo Teoremu 2.13.1.*

4.3 Parcijalni metrički prostori

Postoje mnogo uopštenja pojma metričkog prostora. Matthews [101] je uveo pojam parcijalnih metričkih prostora, sa ciljem njihovog primenjivanja u verifikovanju programskih kodova. Proširio je Banachovu teoremu o kontrakcijama na slučaj kompletnih parcijalnih metričkih prostora.

Posle toga, mnogi autori su istraživali fikusne tačke za preslikavanja na parcijalnim metričkim prostorima (videti na primer [9], [25], [107], [115], [124]). U [25], [26], [102], [115], [125], [132], je ukazano na vezu između topologije parcijalne metrike i teorije domena.

Kroz ovu sekciju će se oznake $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ odnositi, respektivno, na skupove relanih, nenegativnih realnih, racionalnih i prirodnih brojeva.

Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ je *parcijalna metrika na* X ([101]) ako su za svako $x, y, z \in X$ zadovoljena sledeća četiri uslova:

(P1) $x = y$ ako i samo ako je $p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$

(P2) $p(x, x) \leq p(x, y)$

(P3) $p(x, y) = p(y, x)$

(P4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

Uređeni par (X, p) se naziva *parcijalni metrički prostor*.

Očigledno, ako je $p(x, y) = 0$, iz (P1) i (P2) sledi $x = y$. Međutim, ako je $x = y$, $p(x, y)$ ne mora biti 0.

Niz $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ elemenata prostora X je $p-$Cauchyev ako granična vrednost $\lim\limits_{m,n} p(x_n, x_m)$ postoji i konačna je. Parcijalni metrički prostor (X, p) je *kompletan* ako za svaki $p-$Cauchyev niz $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ postoji $z \in X$ tako da je

$$p(z, z) = \lim_{n} p(z, x_n) = \lim_{n,m} p(x_n, x_m). \tag{4.29}$$

Ako je (X,p) parcijalni metrički prostor, tada je

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y), \quad x,y \in X,$$

metrika u X. Niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ konvergira ka $z \in X$ u odnosu na metriku p^s, ako i samo ako važi (4.29). (X,p) je kompletan parcijalni metrički prostor ako i samo ako je (X,p^s) kompletan metrički prostor (videti [101, 107]).

Niz $\{x_n\}$ u parcijalnom metričkom prostoru (X,p), se naziva $0-$Cauchyev (videti npr. [124]) ako je $\lim\limits_{m,n} p(x_n,x_m) = 0$. Kažemo da je (X,p) $0-$kompletan ako svaki $0-$Cauchyev niz u X konvergira, u odnosu na p, ka $x \in X$ pri čemu je $p(x,x) = 0$. Primetimo da je svaki $0-$Cauchyev niz u (X,p) Cauchyev i u (X,p^s), i da je svaki kompletan parcijalni metrički prostor $0-$kompletan. Parcijalan metrički prostor (X,p), gde je $X = \mathbb{Q} \cap [0,+\infty)$ i $p(x,y) = \max\{x,y\}$ za $x,y \geq 0$, je primer $0-$kompletnog parcijalnog metričkog prostora koji nije kompletan.

Za parcijalan metrički prostor (X,p) i preslikavanje $T : X \to X$ uvodimo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} X_T &:= \{x \in X |\ p(x,x) = p(x,Tx)\}, \\ \rho_T &:= \inf\{p(x,x) |\ x \in X_T\}, \\ r_x &:= \inf_i p(T^i x, T^{i+1}x), \end{aligned}$$

gde uzimamo da je $\inf \emptyset = 0$. Uočimo da ukoliko je p metrika, tada je X_T upravo skup fiksnih tačaka preslikavanja T.

Sledeća dva primera parcijalnih metričkih prostora preuzeta su iz [101].

Primer 4.3.1 Ako je $X := \{[a,b] |\ a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$ tada je sa $p([a,b],[c,d]) = \max\{b,d\} - \min\{a,b\}$ definisana parcijalna metrika p na X.

Primer 4.3.2 Neka je $X := \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \cup \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathbb{R}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$, gde je $\mathbb{N}_0$ skup nenegativnih celih brojeva.

Označimo sa $L(x)$ skup $\{0,1,\ldots,n\}$ ako je $x \in \mathbb{R}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$ za neko $n \in \mathbb{N}$, odnosno skup $\mathbb{N}_0$ ako je $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. Tada je sa

$$p(x,y) = \inf\{2^{-i} | i \in L(x) \cap L(y) \text{ i } \forall j \in \mathbb{N}_0\ (j < i \Rightarrow x(j) = y(j))\},$$

određena parcijalna metrika na X.

Neka je $\rho_p := \inf\{p(x,y) : x, y \in X\} = \inf\{p(x,x) : x \in X\}$ i $X_p := \{x \in X :\ p(x,x) = \rho_p\}$. Primetimo da X_p može biti prazan skup.

Primer 4.3.3 Neka je (X,d) parcijalan metrički prostor, $a > 0$ i $f : X \to [0,a)$ proizvoljno preslikavanje. Za $x, y \in X$, $x \neq y$, definišemo $p(x,y) = d(x,y) + a$, i $p(x,x) = f(x)$. Tada je (X,p) parcijalan metrički prostor što je lako pokazati. Ako je $b := \sup f[X] < a$ tada, posmatrajući niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$, uočavamo da je $\limsup p(x_n, x_n) \leq b < a$ i $p(x_n, x_m) \geq a$ kad god je $x_n \neq x_m$. Dakle, ne postoji nestacionarni $p-$Cauchyev niz. Dakle, (X,p) je kompletan. Dalje, ako $\inf f[X] \notin f[X]$, ne postoji $z \in X$ za koje je $p(z,z) = \inf\{p(x,x) |\ x \in X\}$.

4.3.1 Proširenja Banachovog principa kontrakcije

U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate Ilića, Pavlovića i Rakičevića [75]. Oni predstavljaju proširenje Banachovog kontraktivnog principa, kao i neke generalizacije Matthewsove teoreme o fiksnoj tački.

Teorema 4.3.1 *Neka je (X,p) kompletan parcijalan metrički prostor, $\alpha \in [0,1)$, $T : X \to X$ dato preslikavanje i neka za svako $x, y \in X$ važi*

$$p(Tx, Ty) \leq \max\{\alpha p(x,y), p(x,x), p(y,y)\}. \tag{4.30}$$

Tada je

(1) skup X_p neprazan;

(2) postoji jedinstveno $u \in X_p$ za koje je $Tu = u$;

(3) za svako $x \in X_p$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka u, u odnosu na metriku p^s.

Dokaz: Neka je $x \in X$. Iz (4.30) sledi

$$p(Tx, Tx) \leq \max\{\alpha\ p(x,x), p(x,x)\} = p(x,x),$$

pa je $\{p(T^n x, T^n x)\}_{n\geq 0}$ nerastući niz, i za svako $m > n \geq 1$ važi

$$p(T^n x, T^m x) \leq \max\left\{\alpha\ p(T^{n-1}x, T^{m-1}x), p(T^{n-1}x, T^{n-1}x)\right\}. \tag{4.31}$$

Uvedimo oznake:

$$r_x := \lim_n p(T^n x, T^n x) = \inf_n p(T^n x, T^n x) \geq 0$$

$$M_x := \frac{1}{1-\alpha} p(x, Tx) + p(x, x).$$

Pokazaćemo da za svako $n \geq 0$ važi

$$p(x, T^n x) \leq M_x. \tag{4.32}$$

Očigledno je (4.32) zadovoljeno za $n = 0, 1$. Pretpostavimo da (4.32) važi za svako $n \leq n_0 - 1$, i pokažimo da važi i za svako $n = n_0 \geq 2$. Kako je

$$\begin{aligned} p(x, T^{n_0} x) &\leq p(x, Tx) + p(Tx, T^{n_0} x) \\ &\leq p(x, Tx) + \max\left\{\alpha\, p(x, T^{n_0 - 1} x), p(x, x)\right\} \\ &\leq p(x, Tx) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\, p(x, Tx) + p(x, x) = M_x, \end{aligned}$$

indukcijom dolazimo do (4.32). Sada ćmo pokazati da je

$$\lim_{n,m} p(T^n x, T^m x) = r_x. \tag{4.33}$$

Očigledno, za svako $n, m \in \mathbb{N}$ važi $p(T^n x, T^m x) \geq p(T^n x, T^n x) \geq r_x$. Neka je za proizvoljno $\varepsilon > 0$ dato $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $p(T^{n_0} x, T^{n_0} x) < r_x + \varepsilon$ i $2M_x \alpha^{n_0} < r_x + \varepsilon$. Samim tim, za svako $n, m \geq 2 \cdot n_0$ je

$$\begin{aligned} p(T^n x, T^m x) \leq \max&\left\{\alpha\, p(T^{n-1} x, T^{m-1} x), p(T^{n-1} x, T^{n-1} x),\right. \\ &\left. p(T^{m-1} x, T^{m-1} x)\right\} \\ \leq \max&\left\{\alpha^2\, p(T^{n-2} x, T^{m-2} x), p(T^{n-2} x, T^{n-2} x),\right. \\ &\left. p(T^{m-2} x, T^{m-2} x)\right\} \\ \leq \ldots \leq \max&\left\{\alpha^{n_0}\, p(T^{n-n_0} x, T^{m-n_0} x), p(T^{n-n_0} x, T^{n-n_0} x),\right. \\ &\left. p(T^{m-n_0} x, T^{m-n_0} x)\right\} \\ < r_x + \varepsilon.& \end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da važi (4.33). Kako je (X, p) kompletan parcijalan metrički prostor, postoji $\dot{x} \in X$ za koje je

$$r_x = p(\dot{x}, \dot{x}) = \lim_n p(\dot{x}, T^n x) = \lim_{n,m} p(T^n x, T^m x). \tag{4.34}$$

Dokazaćemo da je
$$p(\dot{x},\dot{x}) = p(\dot{x},T\dot{x}). \tag{4.35}$$
Za svako $n \in \mathbb{N}$ je
$$p(\dot{x},T\dot{x}) \leq p(\dot{x},T^n x) - p(T^n x,T^n x) + p(T\dot{x},T^n x). \tag{4.36}$$
Iz (4.30) sledi da postoji podniz $\{n_k\}_{k\geq 1}$ pozitivnih celih brojeva takav da je $p(T\dot{x},T^{n_k}x) \leq \alpha\ p(\dot{x},T^{n_k-1}x)$, $k \geq 1$, ili $p(T\dot{x},T^{n_k}x) \leq p(\dot{x},\dot{x}), k \geq 1$, ili $p(T\dot{x},T^{n_k}x) \leq p(T^{n_k-1}x,T^{n_k-1}x)$, $k \geq 1$. U svakom od slučajeva, kada u (4.36) uzmemo $k \to \infty$ sledi $p(\dot{x},T\dot{x}) \leq p(\dot{x},\dot{x})$. Dakle, važi (4.35).

Pokažimo da je X_p neprazan. Za svako $k \in \mathbb{N}$ biramo $x_k \in X$ tako da je $p(x_k,x_k) < \rho_p + 1/k$. Pokazaćemo da je
$$\lim_{n,m} p(\dot{x}_n,\dot{x}_m) = \rho_p. \tag{4.37}$$
Za dato $\varepsilon > 0$ neka je $n_0 := \left[\dfrac{3}{\varepsilon(1-\alpha)}\right] + 1$. Za $k \geq n_0$ je
$$\begin{aligned}\rho_p &\leq p(T\dot{x}_k,T\dot{x}_k) \leq p(\dot{x}_k,\dot{x}_k) = r_{x_k} \leq p(x_k,x_k)\\ &< \rho_p + \frac{1}{k} \leq \rho_p + \frac{1}{n_0} < \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}.\end{aligned}$$

Zato je:
$$U_k := p(\dot{x}_k,\dot{x}_k) - p(T\dot{x}_k,T\dot{x}_k) < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}, \quad \text{za } k \geq n_0. \tag{4.38}$$
Osim toga, ako je $k \geq n_0$ iz
$$p(\dot{x}_k,\dot{x}_k) = r_{x_k} \leq p(x_k,x_k) < \rho_p + \frac{1}{n_0}$$
sledi
$$p(\dot{x}_k,\dot{x}_k) \leq \rho_p + \frac{\varepsilon}{3}(1-\alpha) \text{ za svako } k \geq n_0. \tag{4.39}$$
Ako je $n,m \geq n_0$, tada
$$\begin{aligned}p(\dot{x}_n,\dot{x}_m) &\leq p(\dot{x}_n,T\dot{x}_n) + p(T\dot{x}_n,T\dot{x}_m) + p(T\dot{x}_m,\dot{x}_m)\\ &\quad - p(T\dot{x}_n,T\dot{x}_n) - p(T\dot{x}_m,T\dot{x}_m)\end{aligned}$$

i (4.35) impliciraju

$$\begin{aligned} p(\dot{x}_n, \dot{x}_m) &\leq U_n + U_m + p(T\dot{x}_n, T\dot{x}_m) \\ &< U_n + U_m + \max\left\{\alpha p(\dot{x}_n, \dot{x}_m), p(\dot{x}_n, \dot{x}_n), p(\dot{x}_m, \dot{x}_m)\right\}. \end{aligned}$$

Prema tome, iz (4.38) i (4.39), dobijamo

$$\begin{aligned} \rho_p \leq p(\dot{x}_n, \dot{x}_m) &\leq \max\left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon(1-\alpha) + p(\dot{x}_n, \dot{x}_n), \frac{2}{3}\varepsilon(1-\alpha) + p(\dot{x}_m, \dot{x}_m)\right\} \\ &\leq \max\left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \rho_p + \varepsilon(1-\alpha)\right\} < \rho_p + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ovim je dokazano (4.37). Zbog kompletnosti parcijalnog metričkog prostora (X, p) postoji $y \in X$ tako da je

$$p(y, y) = \lim_n p(y, \dot{x}_n) = \lim_{n,m} p(\dot{x}_n, \dot{x}_m) = \rho_p.$$

Specijalno, $y \in X_p$, dakle $X_p \neq \emptyset$.

Neka je $x \in X_p$ proizvoljno. Iz (4.34) dobijamo

$$\rho_p \leq p(T\dot{x}, T\dot{x}) \leq p(\dot{x}, T\dot{x}) = p(\dot{x}, \dot{x}) = r_x = \rho_p,$$

te je $T\dot{x} = \dot{x} \in X_p$. Iz (4.34) zaključujemo da niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka $\dot{x}$ u odnosu na metriku p^s. Ostaje da pokažimo jedinstvenost fiksne tačke. Neka su u, v fiksne tačke preslikavanja T. Da je $u = v$ direktno sledi iz

$$p(u, v) = p(Tu, Tv) \leq \max\{\alpha p(u, v), p(u, u), p(v, v)\}.$$

Ili je $(1-\alpha)p(u, v) \leq 0$, tj. $p(u, v) = 0$ pa je $u = v$, ili je $p(u, v) \leq p(u, u) = p(v, v) = \rho_p$, a i u ovom slučaju je $u = v$. □

Napomena 4.3.1 I ako Teorema 4.3.1 ne govori o jedinstvenosti fiksne tačke, lako je videti da ako su, pod učinjenim pretpostavkama, u i v fiksne tačke za koje je $p(u, u) = p(v, v)$ onda je $u = v$. Ako uslov (4.30) zamenimo nekim od narednih strožijih uslova, jedinstvenost fiksne tačke je zagarantovana.

Teorema 4.3.2 *Neka je (X, p) kompletan parcijalan metrički prostor, $\alpha \in [0, 1)$ i $T : X \to X$ preslikavanje. Neka je za svako $x, y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx, Ty) \leq \max\left\{\alpha p(x, y), \frac{p(x, x) + p(y, y)}{2}\right\}. \tag{4.40}$$

Tada postoji jedinstveno $z \in X$ tako da je $Tz = z$. Za dato $z \in X_p$ i svako $x \in X_p$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka z u odnosu na metriku p^s.

Dokaz: Koristeći Teoremu 4.3.1, preostaje da pokažemo jedinstvenost fiksne tačke. Ako je $Tz = z$ i $Tw = w$, tada je

$$p(z, w) = p(Tz, Tw) \leq \max\left\{\alpha p(z, w), \frac{p(z, z) + p(w, w)}{2}\right\}$$

te važi $p(z, w) \leq \alpha p(z, w)$, odakle je $p(z, w) = 0$ i $z = w$, ili $0 = 2p(z, w) - p(z, z) - p(w, w) = p^s(z, w)$ i $z = w$. $\square$

Kao posledicu dobijamo prethodno pomenute rezultate Matthewsa. Primetimo da se Matthewsov rezultat odnosi na kompletan parcijalan metrički prostor, ali važi i za $0-$kompletan parcijalan metrički prostor.

Posledica 4.3.1 *(Matthews [101]) Neka je (X, p) $0-$kompletan parcijalni metrički prostor, $\lambda \in [0, 1)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x, y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda\ p(x, y). \tag{4.41}$$

Tada postoji jedinstveno $z \in X$ takvo da je $Tz = z$. Pritom važi $p(z, z) = 0$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka z u odnosu na p^s.

Dokaz: Uslov (4.41) povlači $p(T^n x, T^n x) \leq \alpha^n p(x, x)$, što zajedno sa (4.34) implicira $p(\dot{x}, \dot{x}) = 0$. Međutim, iz (4.35) dobijamo $p(\dot{x}, T\dot{x}) = 0$ pa je p^s-granična vrednost niza $\{T^n x\}_{n\geq 0}$ zapravo jedinstvena fiksna tačka $\dot{x} = T\dot{x}$. $\square$

Primer 4.3.4 Neka je $X := [0, 1] \cup [2, 3]$ i definišimo preslikavanje $p : X^2 \to \mathbb{R}$ sa:

$$p(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \{x, y\} \cap [2, 3] \neq \emptyset, \\ |x - y|, & \{x, y\} \subseteq [0, 1]. \end{cases}$$

U tom slučaju je (X, p) kompletan parcijalan metrički prostor. Neka je preslikavanje $T : X \to X$ definisano sa:

$$Tx = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x = 2, \\ \frac{2+x}{2}, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Tada je

$$p(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}p(x,y), \quad \{x,y\} \subseteq [0,1],$$

i

$$p(Tx,Ty) \leq \frac{p(x,x)+p(y,y)}{2}, \quad \{x,y\} \cap [2,3] \neq \emptyset.$$

Primetimo, za proizvoljno $\alpha \in [0,1)$ ukoliko je $\alpha \leq 1/2$ tada (4.41) ne važi ni za jedno $x, y \in (2,3]$, a ako je $\alpha \in (1/2,1)$, tada (4.41) ne važi ni za jedno x, y za koje je $2 < y \leq x < 2/(2\alpha - 1)$. Na osnovu Teoreme 4.3.2 postoji jedinstvena fiksna tačka $z = 1$ i $p(1,1) = 0 = \rho_p$. Ovde je $X_p = [2,3]$. Da li Picardov niz $\{T^n x\}_{n\geq 0}$ tačaka $x \in X \setminus X_p$ konvergira ka fiksnoj tački ili ne, zavisi od načina izbora tačke x : ako je $x \in (2,3]$ odgovor je negativan, a ako je $x = 2$ odgovor je pozitivan.

Istraživanja na temu postojanja fiksne tačke višeznačnih kontraktivnih preslikavanja u metričkim prostorima inicirana su od strane S.B. Nadlera [106]. Sledeća teorema je motivisana Nadlerovim rezultatima i na više načina uopštava dobro poznatu Banachovu teoremu o kontrakciji.

Teorema 4.3.3 *Neka je (X,p) $0-$kompletan parcijalni metrički prostor i $T : X \mapsto P(X)$ višeznačno p-kontraktivno preslikavanje (tj. postoji $r \in [0,1)$ takvo da za svako $x_1, x_2 \in X$ i $y_1 \in Tx_1$ postoji $y_2 \in Tx_2$ za koje je $p(y_1,y_2) \leq rp(x_1,x_2)$). Pretpostavimo da je za svako $x \in X$ skup Tx neprazan p^s-zatvoren podskup od X. Tada postoji $x_0 \in X$ za koje je $x_0 \in Tx_0$, tj., x_0 je fiksna tačka preslikavanja T, i $p(x_0,x_0) = 0$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $u_0 \in X$ i $u_1 \in Tu_0$. Tada postoji $u_2 \in Tu_1$ takvo da važi $p(u_1,u_2) \leq rp(u_0,u_1)$. Na taj način dobijamo niz $\{u_n\}_{n\geq 1}$ u X sa osobinom da je $u_{n+1} \in Tu_n$ i $p(u_n,u_{n+1}) \leq rp(u_{n-1},u_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je:

$$p(u_n,u_{n+1}) \leq rp(u_{n-1},u_n) \leq \ldots \leq r^n p(u_0,u_1),$$

i

$$p(u_n,u_n) \leq 2\,r^n p(u_0,u_1),$$

te je za $m > n$:

$$\begin{aligned} p(u_n,u_m) &\leq p(u_n,u_{n+1}) + p(u_{n+1},u_{n+2}) + \ldots + p(u_{m-1},u_m) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \ldots + r^{m-1})p(u_0,u_1) \leq \frac{r^n}{1-r}p(u_0,u_1). \end{aligned}$$

Dakle, niz $\{u_n\}_{n\geq 1}$ je 0-Cauchyev niz u X. Kako je X 0-kompletan parcijalni metrički prostor, postoji $v_0 \in X$ tako da $u_n \to v_0$ kada $n \to \infty$, i $p(v_0, v_0) = 0$. Na osnovu Leme 2.2 iz [124] sledi:

$$p(u_n, v_0) \leq \frac{r^n}{1-r} p(u_0, u_1), \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Izaberimo $w_n \in Tv_0$ tako da za $n \geq 1$ važi $p(u_n, w_n) \leq rp(u_{n-1}, v_0)$. Tada je, za svako $n \in \mathbb{N}$

$$p(u_n, w_n) \leq rp(u_{n-1}, v_0) \leq \frac{r^n}{1-r} p(u_0, u_1).$$

Prema tome, $\{w_n\}$ konvergira ka v_0. Kako je Tv_0 zatvoren podskup, sledi $v_0 \in Tv_0$. $\square$

4.3.2 Operatori Zamfirescua

U ovoj sekciji izlažemo pojedine rezultate Ilića, Pavlovića i Rakičevića [76]. Oni su inspirisani klasičnim rezultatima Zamfirescua [150] za preslikavanja na metričkim prostorima.

Definicija 4.3.1 *Neka je (X, p) parcijalan metrički prostor, $\alpha, \gamma \in [0, 1/2)$, $\lambda \in [0, 1)$ i $T : X \to X$.*

(*i*) *Za T kažemo da je Z_1-operator na X ako za svako $x, y \in X$ važi:*

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) \leq \max \Big\{ &\lambda p(x, y),\ \alpha \left[p(x, Ty) + p(Tx, y)\right], \\ &\gamma \left[p(x, Tx) + p(y, Ty)\right],\ \frac{p(x, x) + p(y, y)}{2} \Big\}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

(*ii*) *Za T kažemo da je Z_2-operator na X ako za svako $x, y \in X$ važi:*

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) \leq \max \{ &\lambda p(x, y),\ \alpha \left[p(x, Ty) + p(Tx, y)\right], \\ &\gamma \left[p(x, Tx) + p(y, Ty)\right] \}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Sledeće pomoćne rezultate ćemo koristiti kasnije.

Lema 4.3.1 *Neka je T Z_1-operator na parcijalnom metričkom prostoru (X,p) i $x \in X$. Neka je $i \geq 1$, $\beta := \max\{\lambda, \alpha/(1-\alpha), \gamma/(1-\gamma)\} \in [0,1)$, i*

$$B_x := \left\{ i \geq 1 : p(T^i x, T^{i+1} x) \leq \ \beta p(T^{i-1} x, T^i x) \right\}.$$

Tada su tačna sledeća tvrđenja:

(1) *Za svaki ceo broj $i \geq 1$ je*

$$p(T^i x, T^{i+1} x) \leq \max \Big\{ \beta p(T^{i-1} x, T^i x), \frac{p(T^i x, T^i x) + p(T^{i-1} x, T^{i-1} x)}{2} \Big\}. \quad (4.44)$$

(2) *Ako za neki ceo broj $i \geq 1$ važi $p(T^{i-1} x, T^{i-1} x) < p(T^i x, T^i x)$ tada je*

$$p(T^i x, T^{i+1} x) \leq \ \beta p(T^{i-1} x, T^i x). \quad (4.45)$$

(3) *Ako za neki ceo broj $i \geq 1$ važi $p(T^i x, T^{i+1} x) > \ \beta p(T^{i-1} x, T^i x)$ tada je*

$$p(T^i x, T^{i+1} x) \leq p(T^{i-1} x, T^{i-1} x). \quad (4.46)$$

(4) $\{p(T^i x, T^{i+1} x)\}_{i \geq 0}$ *je nerastući niz.*

(5)

Ako je B_x beskonačan skup, tada je $r_x = 0$. (4.47)

(6)

$$r_x = \lim_{n,m} p(T^n x, T^m x). \quad (4.48)$$

Dokaz:

(1) Primetimo da ukoliko je $i \in \mathbb{N}$ takvo da važi

$$p(T^i x, T^{i+1} x) \leq \max \Big\{ \alpha \left[p(T^{i-1} x, T^{i+1} x) + p(T^i x, T^i x) \right], \gamma \left[p(T^{i-1} x, T^i x) + p(T^i x, T^{i+1} x) \right] \Big\},$$

tada koristeći

$$p(T^{i-1} x, T^{i+1} x) \leq p(T^{i-1} x, T^i x) + p(T^i x, T^{i+1} x) - p(T^i x, T^i x)$$

sledi:

$$p(T^i x, T^{i+1} x) \leq \max \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\gamma}{1-\gamma} \right\} p(T^{i-1} x, T^i x).$$

Sada iz (4.42) sledi (4.44).

(2) Pod pretpostavkom da je $p(T^{i-1}x, T^{i-1}x) < p(T^i x, T^i x)$, uslov

$$p(T^i x, T^{i+1}x) \leq \frac{p(T^i x, T^i x) + p(T^{i-1}x, T^{i-1}x)}{2}$$

povlači $p(T^i x, T^{i+1}x) < p(T^i x, T^i x)$, što je nemoguće.

(3) Pretpostavimo da je $p(T^i x, T^{i+1}x) > \beta p(T^{i-1}x, T^i x)$. Tada iz (4.45) sledi $p(T^i x, T^i x) \leq p(T^{i-1}x, T^{i-1}x)$, a zatim iz (4.44) imamo

$$p(T^i x, T^{i+1}x) \leq p(T^{i-1}x, T^{i-1}x).$$

(4) Ovo sledi iz (1) i (3).

(5) Dovoljno je pokazati da je $\lim_k p(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) = 0$ gde je $\{n_k : k \geq 1\} = B_x$ strogo rastuća enumeracija skupa B_x. Ovo direktno sledi iz

$$\begin{aligned} p(T^{n_{k+1}}x, T^{n_{k+1}+1}x) &\leq \beta p(T^{n_{k+1}-1}x, T^{n_{k+1}}x) \\ &\leq \beta p(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) \leq \ldots \leq \beta^k p(T^{n_1}x, T^{n_1+1}x), \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili činjenice da je niz $\{p(T^i x, T^{i+1}x)\}_{i \geq 0}$ nerastući i da je $n_k \leq n_{k+1} - 1$.

(6) Primetimo da iz (4) sledi

$$r_x = \lim_i p(T^i x, T^{i+1}x). \tag{4.49}$$

Slučaj 1. B_x je beskonačan skup.

Pretpostavimo da je $n \geq 1$ i $i \geq 2$. Kako je T Z_1-operator, to je

$$\begin{aligned} p(T^n x, T^{n+i}x) \leq \max\Big\{ &\lambda p(T^{n-1}x, T^{n+i-1}x), \\ &\alpha \left[p(T^{n-1}x, T^{n+i}x) + p(T^n x, T^{n+i-1}x)\right], \\ &\gamma \left[p(T^{n-1}x, T^n x) + p(T^{n+i-1}x, T^{n+i}x)\right], \\ &\frac{p(T^{n-1}x, T^{n-1}x) + p(T^{n+i-1}x, T^{n+i-1}x)}{2} \Big\}, \end{aligned}$$

za svako $x \in X$. Koristeći sledeće tri nejednakosti

$$\begin{aligned} p(T^{n-1}x, T^{n+i-1}x) &\leq [p(T^{n-1}x, T^n x) + p(T^n x, T^{n+i}x) \\ &\quad + p(T^{n+i}x, T^{n+i-1}x)], \\ p(T^{n-1}x, T^{n+i}x) &\leq p(T^{n-1}x, T^n x) + p(T^n x, T^{n+i}x), \\ p(T^n x, T^{n+i-1}x) &\leq p(T^n x, T^{n+i}x) + p(T^{n+i}x, T^{n+i-1}x), \end{aligned}$$

dolazimo do nejednakosti:

$$p(T^n x, T^{n+i}x) \leq C\left[p(T^{n-1}x, T^n x) + p(T^{n+i-1}x, T^{n+i}x)\right],$$

gde je $C := \max\{\alpha/(1-2\alpha), \gamma, \lambda/(1-\lambda), 1/2\}$. Dakle, (4.48) sledi iz (4.42), (4.47) i (4.49).

Slučaj 2. B_x je konačan skup ili prazan skup.

Tada postoji pozitivan ceo broj n_1 takav da za svako $i \geq n_1$ važi

$$p(T^i x, T^{i+1}x) > \ \beta p(T^{i-1}x, T^i x).$$

Prema toma iz (4.46) imamo:

$$p(T^i x, T^i x) \leq p(T^i x, T^{i+1}x) \leq p(T^{i-1}x, T^{i-1}x) \text{ za svako } i \geq n_1, \tag{4.50}$$

a odatle sledi

$$r_x = \inf_{i \geq n_1} p(T^i x, T^i x) = \lim_i p(T^i x, T^i x). \tag{4.51}$$

Koristeći (4.49) i (4.51), za dato $\varepsilon > 0$ postoji neko $n_2 \geq n_1$ za koje važi:

$$\left\{p(T^n x, T^{n+1}x), p(T^n x, T^n x)\right\} \subseteq \left[r_x, r_x + \frac{\varepsilon}{2}\right), \ n \geq n_2.$$

Neka su $n \geq n_2$ i $i \geq 2$ proizvoljni. Iz (P4) i (4.50) sledi

$$\begin{aligned}
r_x &\leq p(T^n x, T^n x) \leq p(T^n x, T^{n+i}x) \\
&\leq \sum_{k=0}^{i-1} p(T^{n+k}x, T^{n+k+1}x) - \sum_{k=1}^{i-1} p(T^{n+k}x, T^{n+k}x) \\
&\leq p(T^n x, T^{n+1}x) + p(T^{n+1}x, T^{n+2}x) - p(T^{n+i-1}x, T^{n+i-1}x) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{i-1} [p(T^{n+k}x, T^{n+k+1}x) - p(T^{n+k-1}x, T^{n+k-1}x)] \\
&\leq p(T^n x, T^{n+1}x) + [p(T^{n+1}x, T^{n+2}x) - p(T^{n+i-1}x, T^{n+i-1})] \\
&< r_x + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = r_x + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Iz (4.49) sledi (4.48). □

Nadalje ćemo koristiti oznake iz Leme 4.3.1.

Napomena 4.3.2 *Navešćemo nekoliko komentara u vezi sa prethodnom lemom.*

(a) *U opštem slučaju za Z_1-operatore ne mora postojati $i \in \mathbb{N}$ za koje važi*

$$p(T^i x, T^{i+1}x) \leq \max\left\{\alpha\left[p(T^{i-1}x, T^{i+1}x) + p(T^i x, T^i x)\right],\right.$$
$$\left.\gamma\left[p(T^{i-1}x, T^i x) + p(T^i x, T^{i+1}x)\right]\right\} \quad (4.52)$$

(ovo je nejednakost iz dokaza za (1)). Zaista, neka je $(\mathbb{R}^+, p)$ parcijalan metrički prostor i $p(x,y) = \max\{x,y\}$. Neka je $\alpha = \gamma = \lambda = 0$. Definišaćemo preslikavanje $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sa $Tx = \dfrac{x}{2}$. Operator T je Z_1-operator jer je

$$p(Tx, Ty) = \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right\} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{p(x,x) + p(y,y)}{2},$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}^+$. U svakom slučaju, ne postoje $x \in \mathbb{R}^+$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da važi (4.52) jer je

$$\frac{x}{2^i} = p(T^i x, T^{i+1}x) > 0,$$

za svako $x \in \mathbb{R}^+$. Osim toga, primetimo da je

$$\max\left\{\alpha\left[p(T^{i-1}x, T^{i+1}x) + p(T^i x, T^i x)\right],\right.$$
$$\left.\gamma\left[p(T^{i-1}x, T^i x) + p(T^i x, T^{i+1}x)\right]\right\} = 0.$$

(b) *Skup B_x može biti prazan za svako $x \in X$. To zaključujemo na osnovu prostora i preslikavanja koji su razmatrani u (a). Zaista, $\dfrac{x}{2^i} = p(T^i x, T^{i+1}x) > \beta p(T^{i-1}x, T^{i-1}x) = 0$ za svako $x > 0$ jer je $\beta = 0$.*

(c) *Daćemo primer Z_1-operatora za koji je B_x beskonačan skup za svako $x \in X$. Neka je $(\mathbb{R}^+, p)$ definisan kao u (a), $\alpha = \lambda = 0$ i izaberimo $\gamma \in (0, 1/2)$. Definišemo preslikavanje $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sa $Tx = \gamma x$ za $x \in \mathbb{R}^+$. T je Z_1-operator jer važi nejednakost*

$$\max\{\gamma x, \gamma y\} = p(Tx, Ty) \leq \gamma\left[p(x, Tx) + p(y, Ty)\right] = \gamma x + \gamma y.$$

Za $\gamma \leq \dfrac{\gamma}{1-\gamma} = \beta$ *važi:*

$$p(T^i x, T^{i+1}x) = \gamma^i x \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\ \gamma^{i-1}x = \beta p(T^{i-1}x, T^i x)$$

za svako $x > 0$ *i* $i \in \mathbb{N}$. *Dakle,* $B_x = \mathbb{N}$ *za svako* $x \in \mathbb{R}^+$.

Lema 4.3.2 *Neka je* T Z_1*-operator na parcijalnom metričkom prostoru* (X,p). *Ako su* $x, y \in X$ *i*

$$p(y,y) = \lim_n p(y, T^n x) = \lim_{n,m} p(T^n x, T^m x), \tag{4.53}$$

tada je $p(y,y) = p(y,Ty)$.

Dokaz: Uvešćemo sledeće oznake: $K := \max\{1/(1-\alpha), 1/(1-\gamma)\}$, $\theta_n := p(y,T^n x) - p(T^n x, T^n x)$ i $\mu_n := p(y, T^{n-1}x) - p(y,y)$. Iz

$$\begin{aligned} p(y,Ty) &\leq \theta_n + p(Ty, T^n x) \\ &\leq \theta_n + \max\big\{\lambda\, p(y,T^{n-1}x), \alpha\left[p(y,T^n x) + p(Ty, T^{n-1}x)\right], \\ &\qquad \gamma\left[p(y,Ty) + p(T^{n-1}x, T^n x)\right], \\ &\qquad \left.\frac{p(y,y) + p(T^{n-1}x, T^{n-1}x)}{2}\right\}, \end{aligned}$$

koristeći $p(Ty, T^{n-1}x) \leq p(Ty, y) + \mu_n$, dobijamo

$$\begin{aligned} p(y,Ty) \leq K\theta_n + \max&\left\{\lambda\, p(y,T^{n-1}x), \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[p(y,T^n x) + \mu_n\right],\right. \\ &\left.\frac{\gamma}{1-\gamma} p(T^{n-1}x, T^n x), \frac{p(y,y) + p(T^{n-1}x, T^{n-1}x)}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Kad $n \to \infty$, iz (4.53) sledi $p(y,Ty) \leq p(y,y)$. $\square$

Lema 4.3.3 *Neka je* T Z_1*-operator na kompletnom parcijalnom metričkom prostoru* (X,p). *Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $v \in X_T$ *tako da je*

$$p(v,v) < \rho_T + \varepsilon \quad i \quad p(Tv,Tv) > \rho_T - \varepsilon. \tag{4.54}$$

Dokaz: Iz (4.48) i činjenice da je prostor (X,p) kompletan, zaključujemo da za svako $x \in X$ postoji $\dot{x} \in X$ za koje važi:

$$p(\dot{x},\dot{x}) = \lim_n p(\dot{x},T^n x) = \lim_{n,m} p(T^n x, T^m x) = r_x,$$

što, po prethodnoj lemi, implicira da je $X_T \neq \emptyset$.

Ako je $\rho_T = 0$ tada (4.54) očigledno važi. Dakle, pretpostavimo da je $\rho_T > 0$ i da uslov (4.54) nije zadovoljen. Tada postoji neko $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $v \in X_T$ za koje je $p(v,v) < \rho_T + \varepsilon$ mora da važi $p(Tv,Tv) \leq \rho_T - \varepsilon$. Izaberimo $v \in X_T$ za koje je $p(v,v) < \rho_T + \min\{\varepsilon, (1/\beta - 1)\rho_T\}$. Na osnovu Leme 4.3.2 zaključujemo da je $\dot{v} \in X_T$ i $\rho_T \leq p(\dot{v},\dot{v})$. Tada je

$$\begin{aligned}\rho_T &\leq p(\dot{v},\dot{v}) = r_v \leq p(Tv,T^2v)\\ &\leq \max\left\{\beta p(v,Tv), \frac{p(v,v)+p(Tv,Tv)}{2}\right\}.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Ako važi

$$p(Tv,T^2v) \leq \frac{p(v,v)+p(Tv,Tv)}{2},$$

tada (4.55) povlači

$$\rho_T \leq \frac{p(v,v)+\rho_T-\varepsilon}{2},$$

tj. $\rho_T + \varepsilon \leq p(v,v)$, što je nemoguće.

Ako važi $p(Tv,T^2v) \leq \beta p(v,Tv)$, tada iz (4.55) dobijamo

$$\rho_T \leq \beta p(v,Tv) = \beta p(v,v) < \beta\left(\rho_T + \frac{(1-\beta)\rho_T}{\beta}\right) = \rho_T,$$

te ponovo dolazimo do kontradikcije. □

Sada ćemo navesti i dokazati teoremu o fiksnoj tački za Z_1 i Z_2-operatore na kompletnim parcijalnim metričkim prostorima. Između ostalog, kao posledicu dobijamo neke generalizacije Matthewsove teoreme o fiksnoj tacki.

Teorema 4.3.4 *Neka je T Z_1-operator na kompletnom parcijalnom metričkom prostoru (X,p). Tada:*

(1) *postoji jedinstveno $z \in X$ takvo da je $Tz = z$.*

(2) $p(z,z) = \min\{p(x,x) \mid x \in X_T\} = \rho_T$,

(3) *ako je $x \in X$ i $p(x,x) = p(x,Tx) = p(z,z)$, tada je $x = z$.*

Dokaz: Na osnovu Leme 4.3.3, sledi postoji $v_n \in X_T$ tako da je

$$p(v_n, v_n) < \rho_T + \frac{1}{n}, \text{ i } \rho_T - \frac{1}{n} < p(Tv_n, Tv_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.56}$$

Kako je $p(Tv_n, Tv_n) \leq p(v_n, Tv_n) = p(v_n, v_n)$, sledi

$$0 \leq p(v_n, v_n) - p(Tv_n, Tv_n) < \frac{2}{n}.$$

Osim toga, primetimo da iz $p(y, Tw) \leq p(y, w) + p(w, Tw) - p(w, w)$ sledi

$$p(y, Tw) \leq p(y, w) \text{ za svako } y \in X \text{ i za svako } w \in X_T. \tag{4.57}$$

Neka su $n, m \geq k \geq 1$ proizvoljni i $L := \max\{5, 4/(1-\lambda), 4/(1-2\alpha)\}$. Tada je

$$\rho_T \leq p(v_n, v_n) \leq p(v_n, v_m)$$
$$\leq p(Tv_n, Tv_m) + [p(v_n, Tv_n) - p(Tv_n, Tv_n)] + [p(v_m, Tv_m) - p(Tv_m, Tv_m)].$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \rho_T \leq p(v_n, v_m) &\leq p(Tv_n, Tv_m) + \frac{4}{k} \\ &\leq \frac{4}{k} + \max\Big\{\lambda p(v_n, v_m), \alpha\left[p(v_n, Tv_m) + p(Tv_n, v_m)\right], \\ &\qquad \gamma\left[p(v_n, Tv_n) + p(v_m, Tv_m)\right], \frac{p(v_n, v_n) + p(v_m, v_m)}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

Prema tome, koristeći (4.42), (4.56) i (4.57), dolazimo do nejednakosti

$$\rho_T \leq p(v_n, v_m) \leq \rho_T + \frac{L}{k}.$$

Ovim smo pokazali da je $\lim\limits_{n,m} p(v_n, v_m) = \rho_T$. Sada, zbog kompletnosti prostora, sledi da postoji $z \in X$ tako da je

$$p(z, z) = \lim_{n} p(z, v_n) = \lim_{n,m} p(v_n, v_m) = \rho_T. \tag{4.58}$$

Pokazaćemo da je $z \in X_T$. Neka je $\delta_n := p(z, v_n) - p(Tv_n, Tv_n)$. Tada je

$$\begin{aligned} p(z, Tz) &\leq [p(z, v_n) - p(Tv_n, Tv_n)] + [p(v_n, Tv_n) - p(v_n, v_n)] + p(Tv_n, Tz) \\ &= \delta_n + p(Tv_n, Tz), \end{aligned}$$

odnosno

$$p(z,Tz) \le \delta_n + p(Tv_n, Tz). \tag{4.59}$$

Iz

$$\rho_T - \frac{1}{n} < p(Tv_n, Tv_n) \le p(v_n, Tv_n) = p(v_n, v_n) \le p(z, v_n)$$

i (4.58) sledi $\delta_n \to 0$.

Iz (4.58) dobijamo

$$\begin{aligned} p(z,Tz) \le \delta_n + \max\{&\lambda p(v_n,z), \alpha\left[p(v_n,Tz) + p(Tv_n,z)\right], \\ &\gamma\left[p(v_n,Tv_n) + p(z,Tz)\right], \frac{p(v_n,v_n)+p(z,z)}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

Neka je $N := \max\{1/(1-\alpha), 1/(1-\gamma)\}$. Tada iz

$$p(v_n,Tz) \le p(v_n,z) + p(z,Tz) - p(z,z) \;\; \text{i} \;\; p(Tv_n,z) \le p(v_n,z),$$

sledi

$$\begin{aligned} p(z,Tz) \le N\delta_n + \max\Big\{&\lambda p(v_n,z), \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[2p(v_n,z) - p(z,z)\right], \\ &\frac{\gamma}{1-\gamma} p(v_n,v_n), \frac{p(v_n,v_n)+p(z,z)}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

S obzirom na (4.58), za $n \in \mathbb{N}$ prethodna nejednakost povlači $p(z,Tz) = p(z,z)$. tj. $z \in X_T$. Zato je $p(z,z) = \min\{p(x,x)|\ x \in X_T\} = \rho_T$.

Nadalje ćemo pokazati da je $Tz = z$. Zapravo, pokazaćemo da iz $p(x,x) = p(x,Tx) = \rho_T$ sledi $Tx = x$.

Pretpostavimo da je $\rho_T > 0$ (u suprotnom, tvrđenje očigledno važi). Kako je

$$0 < \rho_T \le \inf_n p(T^{n-1}x, T^n x) \le p(Tx, T^2x) \le p(x,Tx) = \rho_T,$$

zaključujemo da je $p(Tx,T^2x) = p(x,Tx) = \rho_T$. Kako je $p(Tx,T^2x) \ne 0$, iz (4.44) sledi

$$\rho_T = p(Tx,T^2x) \le \frac{p(x,x)+p(Tx,Tx)}{2}$$

tj. $\rho_T \le p(Tx,Tx)$. Prema tome $x = Tx$.

Pretpostavimo da $h, g \in X$ i da je $Th = h$ i $Tg = g$. Na osnovu (4.42) sledi

$$p(g,h) = p(Tg,Th) \le \max\left\{\lambda p(g,h), 2\alpha p(g,h), \frac{p(g,g)+p(h,h)}{2}\right\}.$$

Tada je $p(g,h) \leq 0$, tj. $p(g,h) = 0$, ili $p(g,h) \leq \dfrac{p(g,g)+p(h,h)}{2}$, tj. $p^s(g,h) = 0$. Prema tome $g = h$. $\square$

Teorema 4.3.5 *Neka je T Z_2-operator na 0-kompletnom parcijalnom metričkom prostoru (X,p). Tada postoji jedinstveno $z \in X$ tako da je $Tz = z$. Osim toga, $p(z,z) = 0$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka z u odnosu na p^s.*

Dokaz: Za dato $x \in X$, primetimo da iz (4.43) dolazimo do nejednakosti

$$p(T^i x, T^{i+1}x) \leq \beta p(T^{i-1}x, T^i x), \text{ za svako } i \geq 1.$$

Samim tim je $r_x = 0$, na osnovu (4.47). Sada iz (4.48) sledi $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ je 0-Cauchyev niz. Samim tim za neko $y \in X$ važi

$$p(y,y) = \lim_n p(y, T^n x) = \lim_{n,m} p(T^n x, T^m x) = 0.$$

Iz (4.53) i Leme 4.3.2 dobijamo $p(y,Ty) = 0$, tj. $Ty = y$. Jedinstvenost fiksne tačke sledi iz dokaza Teoreme 4.3.4. $\square$

Sada ćemo navesti neke posledice Teoreme 4.3.4.

Posledica 4.3.2 *([75]) Neka je (X,p) kompletan parcijalni metrički prostor, $\lambda \in [0,1)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x,y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx,Ty) \leq \max\left\{\lambda p(x,y),\ \frac{p(x,x)+p(y,y)}{2}\right\}.$$

Tada važe zaključi (1), (2) i (3) iz Teoreme 4.3.4.

Posledica 4.3.3 *Neka je (X,p) kompletan parcijalni metrički prostor, $\alpha \in [0,1/2)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x,y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx,Ty) \leq \max\left\{\alpha\left[p(x,Ty)+p(Tx,y)\right], \frac{p(x,x)+p(y,y)}{2}\right\}.$$

Tada važe zaključi (1), (2) i (3) iz Teoreme 4.3.4.

Posledica 4.3.4 *Neka je (X,p) kompletan parcijalni metrički prostor, $\gamma \in [0,1/2)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x,y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx,Ty) \leq \max\left\{\gamma\left[p(x,Tx)+p(y,Ty)\right],\ \frac{p(x,x)+p(y,y)}{2}\right\}.$$

Tada važe zaključi (1), (2) i (3) iz Teoreme 4.3.4.

Osvrnućemo se i na posledice Teoreme 4.3.5.

Posledica 4.3.5 *(Matthews [101]) Neka je (X,p) 0-kompletan parcijalni metrički prostor, $\lambda \in [0,1)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x,y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx,Ty) \leq \lambda\ p(x,y). \tag{4.60}$$

Tada postoji jedinstveno $z \in X$ tako da je $Tz = z$. Osim toga, $p(z,z) = 0$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka z u odnosu na p^s.

Posledica 4.3.6 *Neka je (X,p) 0-kompletan parcijalni metrički prostor, $\alpha \in [0,1/2)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x,y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx,Ty) \leq \alpha\left[p(x,Ty)+p(Tx,y)\right]. \tag{4.61}$$

Tada postoji jedinstveno $z \in X$ tako da je $Tz = z$. Osim toga, $p(z,z) = 0$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka z u odnosu na p^s.

Posledica 4.3.7 *Neka je (X,p) 0-kompletan parcijalni metrički prostor, $\gamma \in [0,1/2)$ i $T : X \to X$ dato preslikavanje. Pretpostavimo da je za svako $x,y \in X$ zadovoljen sledeći uslov:*

$$p(Tx,Ty) \leq \gamma\left[p(x,Tx)+p(y,Ty)\right]. \tag{4.62}$$

Tada postoji jedinstveno $z \in X$ tako da je $Tz = z$. Osim toga, $p(z,z) = 0$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n\geq 1}$ konvergira ka z u odnosu na p^s.

Jasno je da je Z_2-operator T i Z_1-operator. Sledeći primer ukazuje na to da obrnuto u opštem slučaju ne važi tj. da postoji Z_1-operator T koji nije Z_2-operator.

Primer 4.3.5 Neka je $X := [0,1] \cup [2,3]$ i definišemo $p : X^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$p(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\}, & \{x,y\} \cap [2,3] \neq \emptyset, \\ |x-y|, & \{x,y\} \subseteq [0,1]. \end{cases}$$

Prostor (X,p) je u ovom slučaju kompletan parcijalni metrički prostor. Definisaćemo preslikavanje $T : X \to X$ sa

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x = 2, \\ \dfrac{2+x}{2}, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Primetimo da za proizvoljno $\lambda \in [0,1)$ važi

$$p(Tx,Ty) > \lambda p(x,y)$$

ukoliko je $\lambda \leq 1/2$ i $x, y \in (2,3]$ ili $\lambda \in (1/2,1)$ i $2 < y \leq x < 2/(2\lambda - 1)$.

Takođe, za proizvoljno $\alpha,\ \gamma \in [0,1/2)$ nejednakost

$$p(Tx,Ty) > \max\left\{\alpha\left[p(x,Ty) + p(Tx,y)\right], \gamma\left[p(x,Tx) + p(y,Ty)\right]\right\}$$

važi ako je $\theta \leq 1/2$ i $2 < x = y \leq 3$, ili ako je $1/2 < \theta$ i $2 < x = y < 2/(2\theta - 1)$, gde je $\theta := 2\max\{\alpha,\ \gamma\}$.

S druge strane, važi

$$p(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2} p(x,y), \quad \{x,y\} \subseteq [0,1],$$

i

$$p(Tx,Ty) \leq \frac{p(x,x) + p(y,y)}{2}, \quad \{x,y\} \cap [2,3] \neq \emptyset.$$

Shodno tome, T je Z_1-operator na X koji nije Z_2-operator. Na osnovu Teoreme 4.3.4 zaključujemo da postoji jedinstvena fiksna tačka $z = 1$ preslikavanja T. Osim toga, $X_T = \{1\} \cup (2,3]$ i $p(1,1) = 0 = \min\{p(x,x) |\ x \in X_T\}$.

U sledećem primeru pokazaćemo da zaključak (3) Teoreme 4.3.4 u opštem slučaju ne važi.

Primer 4.3.6 Neka je (X, p_0) parcijalni metrički prostor, $a > 0$ i $f : X \to [0, a)$ proizvoljno preslikavanje. Ako je $x, y \in X$, $x \neq y$ definišemo $p(x, y) = p_0(x, y) + a$, i $p(x, x) = f(x)$. Očigledno, (X, p) je parcijalan metrički prostor. Neka je $T = I : X \to X$ identično preslikavanje u X, tj., $I(x) = x$, $x \in X$.

Ako je $b := \sup f[X] < a$ tada, posmatrajući niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$, uočavamo da je $\limsup p(x_n, x_n) \leq b < a$ i $p(x_n, x_m) \geq a$ za $x_n \neq x_m$. Dakle, ne postoji nestacionarni p-Košijev niz. Dakle, (X, p) je kompletan. Dalje, ako $\inf f[X] \notin f[X]$, sledi ne postoji $z \in X$ tako da je $p(z, z) = \inf\{p(x, x) | \, x \in X\}$.

Glava 5

Dodatak

U ovom delu izlažemo(podsećamo) na neke pojmove i stavove koji se koriste u knjizi.

Neka je X neprazan skup, $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup skupa X i $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. Familija τ je *topologija na skupu* X, ako zadovoljava sledeće uslove:

$$\emptyset, X \in \tau,$$

$$U_1,\ U_2,\ \ldots, U_n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau,$$

$$\{U_i : i \in I\} \subset \tau \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$$

Par (X, τ) naziva se *topološki prostor*. Obično kažemo "X je topolški prostor", a podrazumevamo da je na X definisana topologija koju označavamo sa τ. Elementi topologije τ zovu se *otvoreni podskupovi skupa* X, ili *otvoreni skupovi u* X, a elementi topološkog prostora *tačke.* Za $F \subset X$, sa F^c označavamo *komplement* skupa F (u odnosu na X). Podskup F topološkog prostora (X, τ) je *zatvoren* ako je njegov komplement otvoren, t.j., ako $X \setminus F \equiv F^c \in \tau$. *Zatvorenje* ili *adherencija* skupa E, označava se sa $\overline{E}$, ili $\operatorname{cl} E$, jeste presek svih zatvorenih skupova iz X, koji sadrže skup E. Očigledno je $\overline{E}$ zatvoren skup, i to je najmanji (po inkluziji) zatvoren skup koji sadrži E. Skup E je zatvoren ako i samo ako je $E = \overline{E}$.

Neka je $E \subset X$ i $\{U_i \subset X : i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$. Ako je

$$E \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

tada se familija $\{U_i \subset X : i \in I\}$ naziva *pokrivač skupa* E. Familija $\{U_i \subset X : i \in I_0\}$, $I_0 \subset I$, sa svojstvom $E \subset \cup_{i\in I} U_i$ naziva se *podpokrivač pokrivača* $\{U_i \subset X : i \in I\}$. Kada je I_0 konačan skup, odgovarajući podpokrivač je *konačan podpokrivač*, a kada je I_0 najviše prebrojiv skup, podpokrivač je *najviše prebrojiv. Otvoren pokrivač (podpokrivač)* je pokrivač(podpokrivač) otvorenim skupovima, t.j., $U_i \in \tau$, $i \in I$ $(i \in I_0)$.

Topološki prostor X je *kompaktan* ako svaki otvoreni pokrivač prostora X ima konačni podpokrivač.

Podskup E topološkog prostora X je *kompaktan* ako je kompaktan potprostor E prostora X. Podskup E topološkog prostora X je *relativno kompaktan* ako je kompaktan potprostor $\overline{E}$ prostora X, gde je $\overline{E}$ zatvorenje skupa E.

Definicija 1. Neka je X neprazan skup. Funkcija $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ naziva se *metrika(rastojanje)* na skupu X ako zadovoljava sledeće uslove:

(i) $d(x, y) \geq 0$ za svako $x,\ y \in X$,

(ii) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x,\ y \in X$, *(simetrija),*

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in X$.*(nejednakost trougla).*

Metrički prostor je par (X, d), gde je d metrika na skupu X. Preslikavanje f sa metričkog prostora (X, d_X) u metrički prostor (Y, d_Y) je *izometrija* ako je

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \quad \text{za svako} \quad x_1, x_2 \in X.$$

Metrički prostori (X, d_X) i (Y, d_Y) su *izometrični* ako postoji izometrija f sa X na Y.

Ako je E neprazan podskup metričkog prostora (X, d), tada je $d : E\times E \mapsto \mathbb{R}$, restrikcija preslikavanja d sa $X \times X$ na $E \times E$, metrika na E. Par (E, d) naziva se *metrički potprostor*, ili jednostavnije *potprostor* prostora (X, d).

Rastojanje izmedju nepraznih skupova E i F, u metričkom prostoru (X, d), definiše se sa

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E,\ y \in F\},$$

a rastojanje izmedju $x \in X$ i nepraznog skupa E sa

$$d(x, E) \equiv d(\{x\}, E) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r > 0$. Skupovi:

$$K(a, r) \equiv K(a, r)_X = \{x \in X : d(x, a) < r\},$$

$$K[a, r] \equiv K[a, r]_X = \{x \in X : d(x, a) \leq r\},$$

$$S(a, r) \equiv S(a, r)_X = \{x \in X : d(x, a) = r\},$$

nazivaju se, respektivno, *otvorena kugla(lopta)*, *zatvorena kugla(lopta)* i *sfera u* X *sa centrom u* a *i poluprečnikom* r. Familija τ_d, podskupova G skupa X sa osobinom da za svako $x \in G$ postoji pozitivan broj $r(x)$ tako da je $K(x, r(x)) \subset G$, je topologija na X, i naziva se *topologija definisana metrikom* d, ili *prirodna topologija na metričkom prostoru* (X, d). (X, τ_d) je Hausdorffov prostor. Ako posebno ne naglasimo, uvek kada metrički prostor razmatramo kao topološki prostor, podrazumevamo da je on topološki prostor sa topologijom koja je definisana metrikom. Podskup G metričkog prostora X je otvoren skup u X ako i samo ako je G unija otvorenih kugli $K(a, r(a)) \subset G,\ a \in G$. Otvorena kugla $K(a, r)$ je otvoren skup, i naziva se r-*okolina* tačke a. Svi pojmovi i stavovi za topološke prostore na prirodan način se prenose i na metričke prostore. Na primer: niz $\{x_n\}$ u (X, d) *konvergira* ka $x \in X$ ako niz $\{x_n\}$ konvergira u (X, τ_d), t.j., ako

$$d(x_n, x) \to 0 \ \text{ kad } \ n \to \infty\,;$$

funkcija f sa metričkog prostora X u metrički prostor Y je neprekidna u tački $a \in X$ ako za svako $\epsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da iz $d(x, a) < \delta$ sledi $d(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Diametar skupa $E \subset X$, označava se sa $\operatorname{diam} E$, je

$$\operatorname{diam} E = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$$

Podskup E, metričkog prostora (X, d), je *ograničen* ako je $\operatorname{diam} E < \infty$. Očigledno je E ograničen podskup u X ako i samo ako je sadržan u nekoj kugli(otvorenoj ili zatvorenoj) prostora X. Niz (x_n) u metričkom prostoru X je *ograničen* ako je skup $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ograničen. Svaki konvergentan niz je ograničen. Tačka x, metričkog prostora X, je *tačka nagomilavanja niza* (x_n) ako postoji podniz (x_{n_k}) niza (x_n) koji konvergira ka x, kad $n \to \infty$. Tačka $a \in X$ je tačka nagomilavanja skupa E ako i samo ako postoji niz (a_n), medjusobno različitih tačaka u E, koji konvergira ka a. Tačka $a \in X$ je adherentna tačka skupa E ako i samo ako postoji niz (a_n) u E koji konvergira ka a. Podskup E metričkog prostora X je zatvoren u X ako i samo ako za svaki niz (x_n) u F iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in X$, sledi $x \in F$.

Definicija 2. Niz (x_n), tačaka metričkog prostora (X, d), je *Cauchyjev* ako za svako $\epsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da iz $m, n \geq n_0$ sledi $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Simbolički, niz (x_n) je Caushyjev ako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon).$$

Svaki konvergentan niz je Cauchyjev, a svaki Cauchyjev niz je ograničen. Ako Cauchyjev niz (x_n) ima konvergentan podniz, tada je (x_n) konvergentan niz.

Definicija 3. Metrički prostor (X, d) je *kompletan* ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Svaki zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan metrički prostor.

Teorema 1. Neka je X metrički prostor. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

- (i) X je kompaktan metrički prostor.
- (ii) Svaki niz u X ima tačku nagomilavanja u X.
- (iii) Svaki beskonačan podskup skupa X ima bar jednu tačku nagomilavanja u X.

Definicija 4. Ako su M i S podskupovi metričkog prostora (X, d) i $\epsilon > 0$, tada se skup S naziva *ϵ-mreža* skupa M ako za svako $x \in M$ postoji $s \in S$, tako da je $d(x, s) < \epsilon$. Prema tome, skup S je ϵ-mreža skupa M ako je

$$M \subset \bigcup_{s \in S} K(s, \epsilon).$$

Ako je skup S konačan, tada se ϵ-mreža S naziva *konačna* ϵ-mreža. Skup M je *totalno ograničen* ako za svako $\epsilon > 0$ ima konačnu ϵ-mrežu.

Teorema 2. Neka je M podskup metričkog prostora (X, d). Ako je skup M relativno kompaktan, tada je skup M totalno ograničen; ako je metrički prostor (X, d) kompletan, tada je skup M relativno kompaktan ako i samo ako je skup M totalno ograničen.

Definicija 7. Neka je $\mathbb{K}$ polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, a X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Funkcija $x \mapsto ||x||$ sa X u $\mathbb{R}$ naziva se *norma* na X ako zadovoljava sledeće uslove:

- (i) $||x|| \geq 0$ za svako $x \in X$,
- (ii) $||x|| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
- (iii) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$ za svako $\lambda \in \mathbf{K}$ i svako $x \in X$,
- (iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ za svako $x, y \in X$.

Normiran prostor (*normiran linearan prostor*, *normiran vektorski prostor*) je par $(X, || \cdot ||)$, gde je X vektorski prostor, a $x \mapsto ||x||$ *norma* na X.

Definicija 8. Neka je X normiran prostor i d funkcija sa $X \times X$ u $\mathbb{R}$, definisana sa

$$d(x, y) = ||x - y|| \quad \text{za svako} \quad x, y \in X.$$

(X, d) je metrički prostor, a za funkciju d kaže se da je *metrika definisana normom* ili da je *prirodna metrika* na normiranom prostoru X.

Kako je normiran prostor $(X, || \cdot ||)$ ujedno i metrički prostor (X, d), to se svi pojmovi i stavovi za metričke prostore na prirodan način prenose i na normirane prostore. Na primer, niz $\{x_n\}$ u $(X, || \cdot ||)$ *konvergira* ka $x \in X$ ako niz $\{x_n\}$ konvergira u (X, d), t.j., ako

$$d(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0, \, n \to \infty \, .$$

Ako je X normiran prostor i (Y, τ) topološki prostor, tada je funkcija $f : X \mapsto Y$ *neprekidna* u $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu U tačke $f(x_0)$, postoji okolina V tačke x_0, takva da je $f(V) \subset U$. Na primer, *norma je neprekidna funkcija*: ovo sledi iz nejednakosti

$$| \, ||x|| - ||y|| \, | \leq ||x - y|| \quad \text{za svako} \quad x, y \in X \, .$$

Lako se dokazuje da ako su $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\{x_n\}$ i (y_n) nizovi iz X, i (λ_n) niz iz $\mathbb{K}$, tada

$$\begin{aligned} x_n \to x \quad &\text{i} \quad y_n \to y \Longrightarrow\ x_n + y_n \to x + y, \\ x_n \to x \quad &\text{i} \quad \lambda_n \to \lambda \Longrightarrow\ \lambda_n x_n \to \lambda x. \end{aligned}$$

Definicija 9. Normiran prostor X je *Banachov prostor* ako je (X, d) kompletan metrički prostor, gde je d metrika definisana normom.

Svaki konačno-dimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je kompletan (Banachov). Specijalno, svaki konačno-dimenzionalan normiran prostor je kompletan (Banachov). Svaki konačno-dimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je zatvoren u X.

Neka je L potprostor normiranog prostora X i $L \neq X$. Tada skup L nema unutrašnjih tačaka. Ako je X beskonačno-dimenzionalan Banachov prostor tada je $\dim X > \aleph_0$.

Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$. Preslikavanje $A : X \mapsto Y$ je *aditivno* ako je

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{za svako} \quad x, y \in X,$$

a *homogeno* ako je

$$A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \text{za svako } \ \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{i svako} \quad x \in X.$$

Preslikavanje A je *linearno* ako je aditivno i homogeno. Aditivno preslikavanje A koje zadovoljava uslov

$$A(\lambda x) = \bar{\lambda} A(x) \quad \text{za svako} \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{i svako} \quad x \in X,$$

naziva se *konjugovano linearno* ; $\bar{\lambda}$ označava konjugovano kompleksan broj kompleksnog broja λ.

Skup svih linearnih preslikavanja sa X u Y, označava se sa $L(X, Y)$, je vektorski prostor sa uobičajenim algebarskim operacijama. Ako je $A, B \in L(X, Y)$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, tada je

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad \text{za svako} \quad x \in X,$$

i

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x) \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Nula u $L(X,Y)$ je preslikavanje O definisano sa $O(x)=0$ za svako $x \in X$. Element prostora $L(X,Y)$ nazivamo *linearan operator* (s obzirom da uglavnom razmatramo linearne operatore, pridev linearan često izostavljamo). Prostor $L(X,Y)$ je *prostor linearnih operatora*. Ako je $X=\mathbb{K}$, tada se linearan operator $A : X \mapsto \mathbb{K}$ naziva *linearan funkcional*, a $L(X,\mathbb{K})$ *prostor linearnih funkcionala*. Ako je $A \in L(X,Y)$ i $x \in X$, tada se obično piše Ax umesto $A(x)$. Ukoliko je $X=Y$, umesto $L(X,X)$ jednostavno pišemo $L(X)$. *Identičan operator* $I \in L(X)$ je operator definisan sa $Ix=x$ za svako $x \in X$. Kada je potrebno da se naglasi na kome je prostoru definisan identičan operator često se umesto I piše I_X. Neka je $A \in L(X,Y)$. *Nula prostor, nulti prostor* ili *jezgro operatora* A, označava se $N(A)$, a definiše sa $N(A)=\{x \in X : Ax=0\}$. *Slika operatora* A, označava se sa $R(A)$, je $R(A)=\{Ax : x \in X\}$. $N(A)$ i $R(A)$ su potprostori, respektivno, u X i Y. Ako je $N(A)=\{0\}$, tada je A *injekcija*, odnosno A je preslikavanje "*jedan-jedan*"; skraćeno "1–1". Ako je $R(A)=Y$, tada je A *surjekcija*, t.j., A je preslikavanje "*na* ". Ako je preslikavanje A "1–1¨ i "na", tada je naravno A bijekcija, a kako se radi o linearnom preslikavanju, tada se za A kaže da je *izomorfizam vektorskih prostora* X *i* Y. Vektorski prostori X i Y su *izomorfni* ako postoji izomorfizam $A \in L(X,Y)$.

Ako je Z vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, $S \in L(X,Y)$ i $T \in L(Y,Z)$, tada se *proizvod* (*kompozicija*) *operatora* S i T, označava sa $T \circ S$, ili jednostavnije TS, a definiše sa $(TS)(x)=T(S(x))$ za svako $x \in X$. Očigedno je $TS \in L(X,Z)$. Ako je $A \in L(X,Y)$ izomorfizam, tada postoji inverzno preslikavanje A^{-1} preslikavanja A. Poznato je da $A^{-1} \in L(Y,X)$ i da važi $AA^{-1}=I_Y$ i $A^{-1}A=I_X$.

Definicija 10. Normirani prostori $(X,\|\cdot\|_X)$ i $(Y,\|\cdot\|_Y)$ nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$ su *kongruentni(izometrički izomorfni*; često se kaže samo *izomorfni)*, ako postoji linearna bijekcija $A : X \mapsto Y$ takva da je

$$\|Ax\|_Y = \|x\|_X \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Preslikavanje A nazivamo tada *kongruencija*.

Definicija 11. Neka su X i Y normirani prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$. Operator $A \in L(X,Y)$ je *ograničen* ako postoji realan broj $M \geq 0$ takav da je

$$||Ax|| \leq M||x|| \ \text{ za svako } \ x \in X.$$

Operator A je ograničen $\Longleftrightarrow \sup\limits_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} < \infty$.

Definicija 12. Neka su X i Y normirani prostori i $A \in L(X,Y)$ ograničen operator. *Norma operatora* A, označava se sa $||A||$, i

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Za ograničen operator $A \in L(X,Y)$ važi:

$$||Ax|| \leq ||A||\,||x|| \quad \text{za svako} \quad x \in X,$$

i za svako $\epsilon > 0$ postoji $x_\epsilon \in X$ tako da je

$$||Ax_\epsilon|| > (||A|| - \epsilon)||x_\epsilon||.$$

Skup svih linearnih ograničenih operatora sa X u Y, označava se sa $B(X,Y)$. Ukoliko je $X = Y$, umesto $B(X,X)$ jednostavno pišemo $B(X)$. Prostor $B(X,\mathbb{K})$, označava se sa X', i naziva *prostor linearnih ograničenih funkcionala* na X, ili *dualni prostor* prostora X.

$B(X,Y)$ je vektorski potprostor u $L(X,Y)$ i norma operatora jeste norma na prostoru $B(X,Y)$. Ako je Y Banachov prostor, tada je $B(X,Y)$ Banachov prostor.

Ako su X i Y normirani prostori i $A \in L(X,Y)$, tada je

$$\sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Teorema 4. Neka su X, Y normirani prostori i $A \in L(X,Y)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) A je uniformno neprekidno preslikavanje na X.

(2) A je neprekidno preslikavanje u 0.

(3) $A \in B(X,Y)$.

Teorema 5. $f \in \ell'$ ako i samo ako postoji $a = (a_i) \in \ell_\infty$ tako da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad \text{za svako} \quad x = (x_i) \in \ell.$$

Pri tome je $\|f\| = \|a\|$ i funkcional f jednoznačno odredjuje element $a \in \ell_\infty$.

Teorema 6. $f \in (\ell_p)'$, $1 < p < \infty$, ako i samo ako postoji $a = (a_i) \in \ell_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tako da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad \text{za svako} \quad x = (x_i) \in \ell_p.$$

Pri tome je $\|f\| = \|a\|$ i funkcional f jenoznačno odredjuje element $a \in \ell_q$.

Teorema 7. $f \in (c_0)'$ ako i samo ako postoji $a = (a_i) \in \ell$ tako da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad \text{za svako} \quad x = (x_i) \in c_0.$$

Pri tome je $\|f\| = \|a\|$ i funkcional f jednoznačno odredjuje element $a \in \ell$.

Literatura

[1] M. Abbas, G. Jungck, *Common Fixed Point Results For Non Commuting Mappings Without Continuity In Cone Metric Spaces,* J. Math. Anal. Appl., **341** 416-420 (2008).

[2] T. Abdeljawad, *Fixed points for generalized weakly contractive mappings in partial metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, **54** 2923–2927 (2011).

[3] J. Achari, *Generalized multi-valued contractions and fixed points*, Rev. Rouw. Math. Pures Appl., **24** 179–182 (1979).

[4] R.P. Agarwal, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge university press, Cambridge, 2001.

[5] A. Ahmad, M. Ahmad, *Some common fixed point theorems for mappings and multi-valued mappings*, J. Math. Anal. Appl., **218** 546–560 (1998).

[6] Ya. I. Alber and S. Guerre-Delabriere, *Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces, new results in operator theory,* Advances and Appl.(ed by I.Gohberg and Yu.Lyubich), Birkhauser Verlag, Basel **98** 1997, 7-22.

[7] I. Altun, A. Erduran, *Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2011, Article ID 508730, 10 Pages, doi: 10.1155/2011/508730.

[8] I. Altun, H. Simsek, *Some fixed point theorems on dualistic partial metric spaces*, J. Adv. Math. Studies 1 (2008) 01-08.

[9] I. Altun, F. Sola, H. Simsek, *Generalized contractions on partial metric spaces*, Topology Appl. 157:18 (2010) 2778-2785.

[10] N.A. Assad, *Aproximation for fixed points of multi-valued contractive mappings*, Math. Nachr., **139** 207–213 (1988).

[11] G.V.R. Babu, K.N.V.V. Vara Prasad, *Mann Iteration Converges Faster than Ishikawa Iteration for the Class of Zamfirescu Operators*, Fixed Point Theory and Applications, Volume 2007, Article ID 97986, 2 pages, doi: 10.1155/2007/97986.

[12] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** 133–181, (1922).

[13] I. Beg, M. Abbas, *Coincidence point and invariant approximation for mappings satisfying generalized weak contractive condition*, Fixed Point Theory and applications, Article ID 74503 1–7 (2006).

[14] V. Berinde, *On the convergence of Ishikawa iteration for a class of quasi contractive operators*, Acta Math. Univ. Comen. 73 (2004) 119-126.

[15] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iterations*, Nonlinear Analysis Forum, 9 (2004), 43-53.

[16] V. Berinde, *A convergence theorem for Mann iteration in the class of Zamfirescu operators*, An. Univ. Vest Timi. Ser. Mat.-Inform. 45 (2007) 33-41.

[17] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin, 2007.

[18] V. Berinde, M. Berinde, *On Zamfirescu's fixed point theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 50 (2005) 443-453.

[19] L. E. Blumenthal, *Theory and application of distance geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1953.

[20] A. Bollenbacher, T.L.Hicks, *A fixed point theorem revisited*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** 898–900 (1988).

[21] D. W. Boyd, J. S. W. Wong, *Another proof of contraction mapping theorem,* Canad. Math. Bull., **11** 605–606 (1968).

[22] D. W. Boyd, J. S. W. Wong, *On nonlinear contractions,* Proc. Amer. Math. Soc., **20** 458–464 (1969).

[23] H. Brézis and F. E. Browder, *A General Principle on Ordered Sets in Nonlinear Functional Analysis*, Advances in Mathematics, 21, 355–364 (1976).

[24] V.W. Bryant, *A remark on a fixed point theorem for iterated mappings,* Amer. Math. Monthly, **75** 399–400 (1968).

[25] M. Bukatin, R. Kopperman, S. Matthews, H. Pajoohesh, *Partial metric spaces*, Amer. Math. Monthly 116 (2009) 708-718.

[26] M.A. Bukatin, S. Yu. Shorina, *Partial metrics and co-continuous valuations*, in: M. Nivat et. al. (Eds.), Foundations of Software Science and Computation Structure, Lecture Notes in Computer Science 1378, Springer, 1998, pp. 125-139.

[27] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions,* Trans. Amer. Math. Soc., **215** 241–251 (1976).

[28] S.K. Chatterjea, *Fixed-point theorems*, C.R. Acad. Bulgare Sci., **25** 727–730 (1972).

[29] C.E. Chidume, *Iterative constructuion of fixed points for multi-valued operators of the monotone type*, Appl. anal., **23** 209–218 (1986).

[30] C.E. Chidume, H. Zegeye, S.J. Aneke, *Iterative methods for fixed points of asymptotically weakly contractive maps*, Apll. Anal., **82** No. 7, 701–712 (2003).

[31] C.E. Chidume, H. Zegeye, E. Prempeh, *Strong convergence theorems for a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings*, Commun. Appl. Nonlinear Anal., **11** No. 2, 25–32 (2004).

[32] G. Choquet, *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[33] D. Cvetković-Ilić, V. Rakočević, *Zbirka zadataka iz Funkcionalne analize,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2007.

[34] D. Ćirić, *Uvod u matematičku analizu I Deo*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2008.

[35] Lj. B. Ćirić, *Generalized contractions and fixed point theorems* , Publ. Inst. Math., **12**(26) (1971) 19–26.

[36] Lj. B. Ćirić, *Fixed point theorems for mappings with a generalized contractive iterate at a point,* Publ. Inst. Math., **13** (1972) 11–16.

[37] Lj.B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle,* Proc. Amer. Math. Soc., **45** 267–273. (1974).

[38] Lj. B. Ćirić, *On Sehgal's maps with a contractive iterate at a point,* Publ. Inst. Math., **33** (1983) 59–62.

[39] Lj. B. Ćirić, *A generalization of Caristi's fixed point theorem*, Math Pannonica **3/2** (1992), 51-57.

[40] Lj. B. Ćirić, *Periodic and fixed point theorems in quasi-metric spaces*, J. Australian Math. Soc. (Series A) **54** (1993), 80-85.

[41] Lj.B. Ćirić, *Quasi contraction nonself mappings on Banach spaces*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur. Sci. Math. **23** 25–31 (1998).

[42] Lj. B. Ćirić, *Semi-Continuous mappings and fixed point theorems in quasi-metric spaces*, Publ.Math. (Debrecen), **54** (1999), 251-261.

[43] Lj.B. Ćirić, *Some Recent Results in Metrical Fixed Point Theory*, University of Belgrade, Belgrade, 2003.

[44] Lj.B. Ćirić, J. S. Ume, M. S. Khan, H. K. Pathak, *On some non-self mappings,* Math. Nach. **251** 28–33, (2003).

[45] Lj. B. Ćirić, H. Lakzian and V. Rakočević, *Fixed point theorems for w-cone distance contraction mappings in TVS-cone metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, **2012:3** doi:10.1186/1687-1812-2012-3.

[46] K.M. Das, K.V. Naik, *Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space,* Proc. Amer. Math. Soc., **77** (3) 369–373 (1979).

[47] R. Dimitrijević, *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Prirodno matematički fakultet, Niš, 1999.

[48] M. Edelstein, *An Extension of Banach's Contraction Principle,* Proc. Amer. Math. Soc., **12** 7–10 (1961).

[49] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc., **37** (1962), 74-79.

[50] I. Ekeland, *Sur les problemes variationnels*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **275** (1972), 1057–1059.

[51] I. Ekelend, *Nonconvex minimization problems,* Bull. Amer. Math. Soc., **1** 443–474 (1979).

[52] J. Eisenfeld and V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems on closed sets through abstract cones*, Appl. Math. Comput. 3 (1977), 155–167

[53] B. Fisher, *A Fixed Point Theorem*, Mathematics Magazine, **48** (1975) 223–225.

[54] B. Fisher, *Quasi-Contractions on Metric Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. ,**75** (1979) 321–325.

[55] Lj. Gajić, V. Rakočević, *Quasi-contractive nonself mappings on convex metric spaces and common fixed point theorems*, Fixed points Theory Appl. **3** 365–375 (2005).

[56] Lj. Gajić, V. Rakočević, *Pair of non-self-mappings and common fixed points*, Applied Mathematics and Computation **187** 999–1006 (2007).

[57] Lj. Gajić and V. Rakočević, *Quasi-contraction on a non-normal cone metric space*, Functional analysis and its applications, **46** 62–65 (2012).

[58] L. Gajić, D. Ilić, V. Rakocević, *On Ćirić maps with a generalized contractive iterate at a point and Fishers quasi-contractions in cone metric spaces*, Applied Mathematics and Computation 216 (2010) 2240–2247.

[59] L. F. Guseman, *Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point,* Proc. Amer. Math. Soc., **26** (1970), 615–618.

[60] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Corrections to:"Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate",* Pacific J. Math., **79** (1978), 563.

[61] O. Hadžić, *Osnovi teorije nepokretne tačke*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1978.

[62] O. Hadžić, *Common fixed point theorems for family of mappings in complete metric spaces*, Math. Japan., **29** No. 1, 397–401 (1979).

[63] O. Hadžić, *A fixed point theorem for the sum of two mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **85** No. 1, 37–41 (1982).

[64] O. Hadžić, *Some properties of measures of noncompactness in paranormed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** 843–849 (1988).

[65] O. Hadžić, Lj. Gajić, *Fixed point theorem for multivalued mappings in topological vector spaces*, Fundamenta Math. CIX 163–169 (1980).

[66] R.H. Haghi, Sh. Rezapour, N. Shahzad, *On fixed points of quasi-contraction type multifunctions*, Applied Mathematics Letters 25 (2012) 843–846.

[67] G.E. Hardy, T.D. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. **16** (1973) 201-206.

[68] T.L. Hicks and B. E. Rhoades, *A Banach type fixed point theorem*, Math. Japon. **24** (1979) 327-330.

[69] T. Hu, J.C. Huang, B.E. Rhoades, *A general principle for Ishikawa iterations for multi-valued mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., **28** 1091–1098 (1997).

[70] L.-G., Huang, X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings,* J. Math. Anal. Appl., **332** 1468–1476 (2007).

[71] N. Husain, *Some types of best approximation and their applications*, doctoral dissertation, Bahouddin Zakariya University, Multan, Pakistan (2001).

[72] D. Ilić, V. Rakočević, *Common fixed points for maps on cone metric space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **341** 876–882 (2008).

[73] D. Ilić, V. Rakočević, *Common fixed points for maps on metric space with $\omega-$distance*, Applied Mathematics and Computation, **199** 599-610 (2008).

[74] D. Ilić, V. Rakočević, *Quasi-contraction on cone metric space*, Applied Mathematics Latters, **22** 728-731 (2009).

[75] D. Ilić, V. Pavlović, V. Rakočević, *Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric space*, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 1326-1330.

[76] D. Ilić, V. Pavlović and V. Rakočević, *Extensions of Zamfirescu theorem to partial metric spaces*, Mathematical and Computer Modeling, 55(2012),801–809.

[77] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 147–150.

[78]] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration ofa nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 59(1976), 65–71.

[79] S. Janković, Z. Kadelburg, S. Radenović, *On cone metric spaces: A survey*, Nonlinear Analysis 74 (2011) 2591-2601

[80] J. E. Joseph, M. H. Kwack, *Alternative approaches to proofs of contraction mapping fixed point theorems,* Missouri J. Math Sci., **11** 167–175 (1999).

[81] G. Jungck, *Commuting maps and fixed points,* Amer. Math. Monthly, **83** 261–263 (1976).

[82] G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Internat. J. Math. Sci., **9** 771–779 (1986).

[83] G. Jungck, *Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta*, Proc. Amer. Math. Soc., **103** 977–983 (1988).

[84] G. Jungck, *Common fixed points for noncontinuous nonself maps on non-metric spaces*, Far East J. Math. Sci., **4** 199-215 (1996).

[85] G. Jungck, N. Hussain, *Compatible maps and invariant approximations*, J. Math. Anal. Appl., **325** 1003-1012 (2007).

[86] O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metrix spaces,* Math. Japonica, **44** 381–391 (1996).

[87] Z. Kadelburg, S. Radenović and V. Rakočević, *Remarks on "quasi-contraction on a cone metric space",* Applied Mathematics Letters, 22 (2009) 1674–1679

[88] Z. Kadelburg, S. Radenović and B. Rosić, *Strict Contractive Conditions and Common Fixed Point Theorems in Cone Metric Spaces*, Fixed Point Theory and Applications Volume 2009, Article ID 173838, 14 pages doi:10.1155/2009/173838.

[89] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Cal. Math., **60** 71-76 (1968).

[90] R. Kannan, *Some results on fixed points-II*, Amer. Math. Monthly 76 (1969) 405-408.

[91] H. Kaneko, S. Sessa, *Fixed point theorems for compatible multi-valued and single-valued mappings,* Internat. J. Math. and Math. Sci., **12** (2) 257–262 (1989).

[92] E. Karapinar, *Generalizations of Caristi Kirk's theorem on partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2011, 2011:4, doi: 10.1186/1687-1812-2011-4.

[93] W. Kirk, *On succesive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces* , Glasgow Math. J., **12** 6–9 (1971).

[94] M. Khamsi, W. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, John Wiley & Sons, INC., New York, (2000).

[95] W. A. Kirk and L. M. Saliga, *The Brézis -Browder Order Principle and Extensions of Caristi's Theorem*, Nonlinear Analysis, 47 (2001), 2765–2778.

[96] W. Kirk, B. Sims, *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2001).

[97] I. I. Kolodner, *Fixed points*, The American Mathematical Monthly,**71** 906 (1964).

[98] Đ. Kurepa, *Fix point approach in mathematics*, "Constantin Carathéodory: An International Tribute", **vol II**, Word Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 713–767 (1991).

[99] W.R. Mann, *Mean value mrthods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** 506–510 (1953).

[100] J. Matkowski, *Fixed Point Theorems for Mappings with a Contractive Iterate at a Point*, Proc. Amer. Math. Soc., **62** 344–348 (1977).

[101] S.G. Matthews, *Partial metric topology*, in: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, in: Ann. New York Acad. Sci., vol. 728, 1994, pp. 183-197.

[102] S.G. Matthews, *An extensional treatment of lazy data flow deadlock*, Theoret. Comput. Sci. 151 (1995) 195-205.

[103] A. Meir , E.Keeler , *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl., **28** 326–329 (1969).

[104] G. V. Milovanović, *Numerička analiza*, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[105] P.P. Murthy, *Important Tools and Possible Applications of Metric Fixed Point Theory*, Nonlinear Analysis, **47** 3479–3490 (2001).

[106] S.B. Nadler Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969), 475-487.

[107] S. Oltra, O. Valero, *Banach's fixed theorem for partial metric spaces*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 36 (2004) 17-26.

[108] R. S. Palais, *A simple proof of the Banach contraction principle*,J. fixed point theory appl. **2** (2007), 221-223

[109] R. P. Pant, *Common fixed points of noncommuting mappings*, J. Math. Anal. Appl., **188** 436–440 (1994).

[110] H.K. Pathak, *Fixed point theorems for weak compatible multi-valued and single-valued mappingss*, Acta Math. Hungar, **67** 69–78 (1995).

[111] E. Rakotch, *A Note on Contractive Mappings* , Proc. Amer. Math. Soc., **13** 459–465 (1962).

[112] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, *Naučna knjiga*, Beograd, 1994.

[113] V. Rakočević, *Quasi contraction nonself mappings on Banach spaces and common fixed point theorems,* Publ. Math. Debrecen, **58** 451–460 (2001).

[114] D. O'Regan, N. Shahzad, *Invariant approximations for generalized I-contractions*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **26** (4-5):565–575 (2005).

[115] A.F. Rabarison, *Partial metrics*, Supervised by Hans-Peter A. Künzi, African Institute for Mathematical Sciences, 2007.

[116] B. K. Ray, B. E. Rhoades, *Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate,* Pacific J. Math., **71** (1977), 517–519.

[117] S. Reich, *Some remarks concerning contraction mappings*, Canad. Math. Bull. , **14** 121–124 (1971).

[118] Sh. Rezapour and R. Hamlbarani Haghi, *Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008) 719-724.

[119] Sh. Rezapour and M. Derafshpour, R. Hamlbarani Haghi, *A review on topological properties of cone metric spaces,* Analysis, Topology and Applications 2008, Vrnjačka Banja, Serbia, $May\ 30 - June$ 4, 2008.

[120] Sh. Rezapour, R.H. Haghi, N. Shahzad, *Some notes on fixed points of quasi-contraction maps*, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 498–502.

[121] B. E. Rhoades, *Fixed Point Iterations Using Infinite Matrices*, Trans. Amer. Math. Soc., **196** 161–176 (1974).

[122] B. E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **26** 257–290 (1977).

[123] B. E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Analysis, **47** 2683–2693 (2001).

[124] S. Romaguera, *A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. Volume 2010, Article ID 493298, 6 Pages, doi: 10.1155/2010/493298.

[125] S. Romaguera, M. Schellekens, *Duality and quasi-normability for complexity spaces*, Appl. General Topology 3 (2002) 91-112.

[126] Rus, I.A., *Metrical Fixed Point Theorems*, Univ. of Cluj-Napoca, 1979

[127] Rus, I.A., *Principles and Applications of the Fixed Point Theory (in Romanian)*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979

[128] Rus, I.A., *Picard operator and applications*, Babes-Bolyai Univ., 1996

[129] Rus, I.A., *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, Cluj- Napoca, 2001

[130] Rus, I.A., *The method of successive approximations (in Russian)*, Revue Roum. de Math. Pures et Appl. 17 (1972), 1433–1437

[131] Rus, I.A., *Picard operators and applications*, Scientiae Math. Japon. 58 (2003), No. 1, 191–219

[132] M.P. Schellekens, *The correspondence between partial metrics and semivaluations*, Theoret. Comput. Sci. 315 (2004) 135-149.

[133] S. Sessa, *On weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **46** 149–153 (1982).

[134] V. M. Sehgal, *A fixed point theorems for mappings with a contractive iterate,* Proc. Amer. Math. Soc., **23** (1969), 631–634.

[135] V. M. Sehgal, *A New Proof of Caristi's Fixed Point Theorem,* Proc. Amer. Math. Soc., **66** (1977), 54–56.

[136] S.L. Singh, *A new approach in numerical proxis*, Progr. Math. (Varanasi), **32** No. 2, 75–89 (1998).

[137] S.L. Singh, C. Bhatnagar, S.N. Mishra, *Stability of Jungck-Type iterative procedures*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **2005:19** 3035–3043 (2005).

[138] S. Solutz, *Contributions to the theory of Mann and Ishikawa iterations*, PhD Thesis, "Babes-Bolyai" University, Cluj-Napaco, (2004).

[139] P.V. Subrahmanyam, *A Common Fixed Theorem in Fazzy Metric Spaces*, Information Sciences, **83** 109–112 (1995).

[140] T. Suzuki, *Generalized Distance and Existence Theorems in Complete Metric Spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **253** 440–458 (2001).

[141] W. Takahashi, *A convexity in metric space and nonexpansive mappings*, I. Kodai Math. Sem. Pep., **22** 142–149 (1970).

[142] M.R. Tasković, *A characterization of complete metric space*, Math. Japon., **29** 107–114 (1984).

[143] M.R. Tasković, *A monotone principle of fixed points*, Proc. Amer. Math. Soc., **94** 427–432 (1985).

[144] M.R. Tasković, *A characterization of the class of conctraction type mappings*, Kobe J. Math., **2** 45–55 (1985).

[145] M.R. Tasković, *On an equivalent of the axiom of choice and its applications*, Math. Japon., **31** 979–991 (1986).

[146] M.R. Tasković, *Extensions of Brouwer's theorem*, Math. Japon., **36** 685–693 (1991).

[147] J.S. Ume, *Fixed point theorems related to Ćirić contraction principle,* Journal of Math. Anal. Appl., **225** 630–640 (1998).

[148] O. Valero, *On Banach's fixed point theorems for partial metric spaces*, Applied General Topology 6 (2005) 229-240.

[149] O. Valero, *On Banach's fixed point theorem and formal balls*, Applied Sciences 10 (2008) 256-258.

[150] T. Zamfirescu, *Fix point theorems in metric spaces*, Archiv der Mathematik, **23** 292-298 (1972).

[151] L. Zeng, *Ishikawa iterative procedure for approximating fixed points of strictly pseudocontractive mappings*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, **18** No. 3, 283–286 (2003).

[152] H. Zhou, J.I. Kang, S.M. Kang, Y.J. Cho, *Convergence theorems for uniformly quasi-Lipschitzian mappings*, Int. J. Math. Sci., No. 13-16, 763–775 (2004).

[153] H. Zhou, S.Q. Zhang, *Convergence of Ishikawa iterative sequences in uniformly convex Basnach spaces*, J. Huazhoung Univ. Sci. Technol. Nat. Sci., **32** No. 6, 47–48 (2004).

Indeks pojmova